9. 関数の収束・極限・連続性

本節では、前節の公理を満たす順序体として実数全体の成す順序体 $\boldsymbol{R}$ を基礎づけた上で、$\boldsymbol{R}$ 上で定義され $\boldsymbol{R}$ に値を取る関数 $f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ に関する、収束・極限・連続性について考える。

関数の収束について以下で定義する：関数 $f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ と $a\in\boldsymbol{R}$ について、

- $x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow\alpha$
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x\in\boldsymbol{R}:0<|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon$
- $x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow+\infty$
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\forall K\in\boldsymbol{R}:\exists\delta>0:\forall x\in\boldsymbol{R}:0<|x-a|<\delta\Longrightarrow f(x)>K$
- $f(x)\longrightarrow-\infty$ も同様（しかるべく定式化せよ）

$x\longrightarrow\pm\infty$ のときの極限も考える：

- $x\longrightarrow+\infty$ のとき $f(x)\longrightarrow\alpha$
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\forall\varepsilon>0:\exists M\in\boldsymbol{R}:\forall x\in\boldsymbol{R}:x>M\Longrightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon$
- $x\longrightarrow+\infty$ のとき $f(x)\longrightarrow+\infty$
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\forall K\in\boldsymbol{R}:\exists M\in\boldsymbol{R}:\forall x\in\boldsymbol{R}:x>M\Longrightarrow f(x)>K$
- $f(x)\longrightarrow-\infty$ および $x\longrightarrow-\infty$ も同様（しかるべく定式化せよ）

関数の定義域は、しばしば $\boldsymbol{R}$ 全体ではなく、その一部 $I\subset\boldsymbol{R}$ のみ（多くは適当な区間）のこともある。このとき、I 上定義された実数値関数という。また、$\boldsymbol{R}$ 全体で定義された関数を、$I\subset\boldsymbol{R}$ に制限して考えるときもある。

関数 f の有界性については次で定義する：

- f が I で有界 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\exists C>0:\forall x\in I:|f(x)|<C$
- f が I で上に有界 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\exists C\in\boldsymbol{R}:\forall x\in I:f(x)<C$
- f が I で下に有界 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\exists C\in\boldsymbol{R}:\forall x\in I:f(x)>C$

関数 f の連続性については次で定義する：関数 $f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ と $a\in\boldsymbol{R}$ について、

- f が a で連続 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow f(a)$
  （ここだけ読むと高校で学んだ定義と同じだが、収束の基礎付けとして次があることに注意せよ。）
  $\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x\in\boldsymbol{R}:|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

関数 f が I 内の任意の $a\in I$ で連続のとき、I で連続であるという。また、$\boldsymbol{R}$ 全体（定義域全体）で連続のとき、単に連続であるという。

問 9-1A. 関数 f と $a\in\boldsymbol{R}$ について、「$x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow\alpha$」でない（$x\longrightarrow a$ で $f(x)$ が α に収束しない）ということを、論理式で記述せよ。「$f(x)\longrightarrow\pm\infty$」や「$x\longrightarrow\pm\infty$ のとき」についても、同様に否定命題を書いてみよ。

問 9-2B. 関数 f が $x\longrightarrow a$ で収束するとき、その極限値は一意であること（即ち、$x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow\alpha$ かつ $f(x)\longrightarrow\beta$ ならば、$\alpha=\beta$）を示せ。この一意に定まる極限値を $\lim_{x\longrightarrow a}f(x)$ と書く。$x\longrightarrow\pm\infty$ の場合も同様。

（注：このとき、表記 $\lim_{x\longrightarrow a}f(x)$ は極限の「値」（一つの実数）を意味する。一つの実数なので、実数に対して定義された演算・大小比較・極限操作などが自在に出来る。一方、$x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow+\infty$ となる場合にも、$\lim_{x\longrightarrow a}f(x)=+\infty$ と書くこともある（多い）が、このときの左辺は一つの実数値を表しているわけではなく、式全体で単に「$x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow+\infty$」である「こと」を表している便宜上の表記に過ぎない。）

問 9-3B. 関数 f,g について、$x\longrightarrow a$ のとき、$f(x)\longrightarrow\alpha,g(x)\longrightarrow\beta$ ならば、$f(x)+g(x)\longrightarrow\alpha+\beta$ であることを示せ。

問 9-4C. 関数 f,g について、$x\longrightarrow a$ のとき、$f(x)\longrightarrow\alpha,g(x)\longrightarrow\beta$ ならば、$f(x)g(x)\longrightarrow\alpha\beta$ であることを示せ。

問 9-5B. 関数 f について、$x\longrightarrow a$ のとき、$f(x)\longrightarrow\alpha$ かつ $\alpha>0$ ならば、或る $\delta>0$ が存在して、$0<|x-a|<\delta$ ならば $f(x)>0$ であることを示せ。（このことを a の十分近くで $f(x)>0$ とも言う。）

問 9-6C.　関数 f, g について、$x \longrightarrow a$ のとき、$f(x) \longrightarrow \alpha, g(x) \longrightarrow \beta$ かつ $\beta \neq 0$ ならば、$f(x)/g(x) \longrightarrow \alpha/\beta$ であることを示せ。

問 9-7B.　上の何問かの $x \longrightarrow \pm\infty$ 版を与えよ。

問 9-8B.　関数 f, g について、$a \in \boldsymbol{R}$ で連続であれば、$f(x)+g(x)$ も $a \in \boldsymbol{R}$ で連続であることを示せ。

問 9-9C.　関数 f, g について、$a \in \boldsymbol{R}$ で連続であれば、$f(x)g(x)$ も $a \in \boldsymbol{R}$ で連続であることを示せ。

問 9-10B.　関数 f について、$a \in \boldsymbol{R}$ で連続かつ $f(a) > 0$ であれば、或る $\delta > 0$ が存在して、$|x-a| < \delta$ ならば $f(x) > 0$ （a の十分近くで $f(x) > 0$）であることを示せ。

問 9-11C.　関数 f, g について、$a \in \boldsymbol{R}$ で連続かつ $g(a) \neq 0$ であれば、$f(x)/g(x)$ も $a \in \boldsymbol{R}$ で連続であることを示せ。

問 9-12B.　次の関数が連続であることを、（直接）定義に順って示せ。

(1) $f(x) = x$　　(2) $f(x) = x^2$　　(3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ （但し、$x \neq 0$ で）

問 9-13D.　関数 f と実数 $a, \alpha \in \boldsymbol{R}$ について、次は同値である：

(1) $x \longrightarrow a$ のとき、$f(x) \longrightarrow \alpha$

(2) $x_n \longrightarrow a$ となる任意の実数列 $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$f(x_n) \longrightarrow \alpha$

問 9-14C.　$x \neq 0$ で定義された次の関数 f の $x \longrightarrow 0$ での極限について吟味せよ。

(1) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$　　(2) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

問 9-15B.　次で定まる関数 f は、任意の実数 $a \in \boldsymbol{R}$ で不連続であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \boldsymbol{Q}) \\ 0 & (x \notin \boldsymbol{Q}) \end{cases}$$

問 9-16D.　次で定まる関数 f の連続性について吟味せよ。

(1) $f(x) = \begin{cases} x & (x \in \boldsymbol{Q}) \\ 0 & (x \notin \boldsymbol{Q}) \end{cases}$　(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & (x = \dfrac{p}{q} \in \boldsymbol{Q}, p, q \in \boldsymbol{Z}, \text{互いに素}, q > 0) \\ 0 & (x \notin \boldsymbol{Q}) \end{cases}$

問 9-17D.　（中間値の定理）有界閉区間 $I = [a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x \leq b\}$ で連続な関数 f について、$f(a) < 0, f(b) > 0$ ならば、$f(c) = 0$ となる $c \in I$ が存在する。（注：前節で挙げた「実数の連続性の公理」が本質的に必要な定理である。同値な条件のうちのどれかの形を用いて示してみよ。）

問 9-18C.　中間値の定理を用いて、次を示せ：$\boldsymbol{R}$ 上定義された連続関数 f について、$\displaystyle\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ならば、$f(c) = 0$ となる $c \in \boldsymbol{R}$ が存在する。

問 9-19B.　関数 $f(x) = x^2 - 2$ を考える。

(1) f が連続であることを示せ。

(2) 区間 $I = [1, 2]$ において f が単調増加であることを示せ。

(3) $1 < c < 2$ かつ $f(c) = 0$ となる実数 c が唯一つ存在することを示せ。（ヒント：存在性は中間値の定理、一意性は単調性から。）

（注：これにより唯一つ定まる c が $\sqrt{2}$ である。一般に、正の実数 a の平方根 $\sqrt{a}$ の存在はこのようにして保証されるので、f が連続であることの証明内で正の実数の平方根を使うことは（まだ）出来ない。）

問 9-20D.　（最大値の定理）有界閉区間 $I = [a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x \leq b\}$ で連続な関数 f について、

(1) 値域 $f(I) := \{f(x) | x \in I\}$ は有界である。

(2) 値域 $f(I)$ には最大値・最小値が存在する。（値域 $f(I)$ が有界であるから、その上限・下限が存在するが、その値が値域に属する。即ち、或る $c \in I$ によって関数値 $f(c)$ として実現される。）

問 9-21C.　有界であっても閉でない定義域（例えば開区間 $(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} | a < x < b\}$）の上で定義された連続関数では、最大値の定理は成立するとは限らない。（有界とも限らないし、有界であっても最大値・最小値が存在するとは限らない。）例を挙げよ。