

2019年度秋期 現代数学 B (担当: 角皆)

学生番号: \_\_\_\_\_ 氏名: \_\_\_\_\_

**1** 整数全体の集合  $Z$  から有理数全体の集合  $Q$  を以下のようにして構成したい。以下では、 $Z$  の演算に関する諸々の法則は既知とする。

(1) 集合  $X := Z \times (Z \setminus \{0\})$  上の関係  $\sim$  を次で定める:

$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X$  に対して、

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

このとき、 $\sim$  は  $X$  上の同値関係となる。特にそのうち推移律を示せ。

(ヒント: 消約律「 $a, b, c \in Z, a \neq 0$  のとき  $ab = ac \implies b = c$ 」を用いる必要がある。証明中でこの性質を用いる所を明記せよ。)

(2)  $Q := X / \sim$  とし、 $(a, b) \in X$  の属する同値類を  $a/b \in Q$  と書く。このとき、

$$a_1/b_1 + a_2/b_2 := (a_1 b_2 + a_2 b_1) / b_1 b_2$$

により、 $Q$  上の演算  $+: Q \times Q \rightarrow Q$  が well-defined に定まることを示したい。

(a) 示すべきことは、次のことである:

$$\begin{cases} a_1/b_1 = a'_1/b'_1 \\ a_2/b_2 = a'_2/b'_2 \end{cases} \implies$$

(b) そのことを示せ。

- (3) 前問で定義した加法と同様に、 $Q$  上の乗法  $\cdot : Q \times Q \rightarrow Q$  を定義し、well-defined であることを示せ。

- (4)  $Q$  の加法・乗法に関する分配律

$$x(y + z) = xy + xz, \quad (x + y)z = xz + yz$$

を示せ。(左右どちらかで構わない。)