

2019年度秋期 現代数学 B (担当: 角皆)

学生番号: \_\_\_\_\_ 氏名: \_\_\_\_\_

**2** Peano の公理系に基づいて、自然数の集合  $N$  上に加法・乗法を定めていく。以下の証明では帰納法を駆使するが、その際に、証明中で帰納法の仮定を用いる所を明記せよ。

(1)  $N$  に於ける加法  $+$  を次で定める:

- $n + 0 := n$
- $n + m' := (n + m)'$

このとき、結合律

$$\forall a, b, c \in N : (a + b) + c = a + (b + c)$$

を示せ。

(ヒント:  $a, b \in N$  を任意に固定し、 $c$  に関する帰納法を用いる。即ち、

(a)  $a, b, 0 \in N$  に対し成立 ( $c = 0$  のとき成立)

(b)  $a, b, c \in N$  に対し成立 (帰納法の仮定)  $\implies a, b, c' \in N$  に対し成立を示す。)

(2)  $\mathbf{N}$  に於ける加法  $+$  は既に定義されていて、可換律・結合律や  $a' + b = a + b'$  となることなどの基本性質は証明済みとする。その上で、 $\mathbf{N}$  に於ける乗法  $\cdot$  を次で定める：

- $n \cdot 0 := 0$
- $n \cdot m' := n \cdot m + n$

このとき、

(a)  $\forall a, b \in \mathbf{N} : a' \cdot b = a \cdot b + b$  を示せ。

(ヒント： $a$  を任意に固定して、 $b$  に関する帰納法。乗法の可換律はまだ示されていないことに注意。)

(b)  $\forall a \in \mathbf{N} : 0 \cdot a = 0$  を示せ。

(ヒント： $a$  に関する帰納法。乗法の可換律はまだ示されていないことに注意。)

(c) 可換律  $\forall a, b \in \mathbf{N} : a \cdot b = b \cdot a$  を示せ。

(ヒント： $a$  を任意に固定して、 $b$  に関する帰納法。(a),(b) を用いよ。)