2019 年度秋期 **現代数学 B** （担当：角皆）

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) 実数 $\sqrt[3]{2} \in \boldsymbol{R}$ は $x^3 = 2$ を満たす唯一の実数として特徴づけられる。

(a) Dedekind の切断による $\boldsymbol{R}$ の構成に基づいて、$\sqrt[3]{2}$ に対応する $\boldsymbol{Q}$ の切断を、$\boldsymbol{Q}$ 内の言葉のみを用いて記述せよ。

(b) 有理 Cauchy 列の同値類による $\boldsymbol{R}$ の構成に基づいて、$\sqrt[3]{2}$ に対応する有理 Cauchy 列の一つを挙げよ。

(2) （以下の問では、実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は、従来素朴に知っているものとして考えてよい。）実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

(a) $\boldsymbol{a}$ が正の実数 $\alpha > 0$ に収束することの（$\varepsilon - \delta$ 流の）定義を、論理記号を交えた数式で記述せよ。

(b) $\boldsymbol{a}$ が正の実数 $\alpha > 0$ に収束しないこと（つまり上の否定）を、論理記号を交えた数式で記述せよ。

(c) $\boldsymbol{a}$ が Cauchy 列であることの定義を、論理記号を交えた数式で記述せよ。

(d) $\boldsymbol{a}$ が Cauchy 列でないこと（つまり上の否定）を、論理記号を交えた数式で記述せよ。

(3) 実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ が正の実数 $\alpha > 0$ に収束するとき、
$\exists c \in \boldsymbol{R} : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \geq N : a_n > c > 0$ となることを示せ。

(4) 実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$a_n \longrightarrow \alpha, b_n \longrightarrow \beta$ であるとき、

(a) $a_n + b_n \longrightarrow \alpha + \beta$ であることを示せ。

(b) $a_n b_n \longrightarrow \alpha\beta$ であることを示せ。