2019年度秋期 **現代数学B** （担当：角皆）

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

4 （本問では、実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は、従来素朴に知っているものとして考えてよい。）

(1) $\boldsymbol{R}$ の次の部分集合 X_i に対して、最大値・最小値・上限・下限がそれぞれ存在するか。存在するならその値を解答欄に記せ。存在しないなら「なし」と記せ。

$\boldsymbol{R}$ の部分集合	最大値	最小値	上限	下限
$X_1 = [-2, 3) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid -2 \leq x < 3\}$				
$X_2 = (0, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x > 0\}$				
$X_3 = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \middle\| n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$				
$X_4 = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \middle\| n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$				
$X_5 = \{x \in \boldsymbol{Q} \mid x^2 \leq 3\}$				
$X_6 = \{x \in \boldsymbol{Q} \mid x^3 \leq 5\}$				

(2) 集合族 $(X_n)_{n\geq 1}$ に対し、その共通部分および合併をそれぞれ $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} X_n$, $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1} X_n$ と書く：

$$\bigcap_{n\geq 0} X_n := \{x \mid \forall n \geq 1 : x \in X_n\}, \qquad \bigcup_{n\geq 0} X_n := \{x \mid \exists n \geq 1 : x \in X_n\}.$$

次で定める集合族 $(X_n)_{n\geq 1}$ に対し、$\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} X_n$, $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1} X_n$ は何か。

(a) $X_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \left\{ x \in \boldsymbol{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n} \right\}$

(b) $X_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = \left\{ x \in \boldsymbol{R} \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \right\}$

(c) $X_n = [n, 2n] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid n \leq x \leq 2n\}$

(3) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ で定める実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ について、

(a) 上に有界であることを示せ。
（ヒント：二項定理 $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ （ここに $\dbinom{n}{k} := \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ は二項係数）で展開して、$k! \geq 2^{k-1}$ であることなどを用いて各項を上から評価すれば、$a_n \leq 3$ くらいで押さえられる。）

(b) 単調増加であることを示せ。
（ヒント：a_n と a_{n+1} との二項展開の各項を比較せよ。）

これから、実数の連続性（上に有界な単調増加数列は極限値を持つ）により、$\boldsymbol{a}$ の収束先となる実数の存在が保証される。（この極限値が自然対数の底（Napier 数）e に他ならない。）