有限オートマトン

(決定性) 有限オートマトン $M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ の形式的定義

- Q：有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- Σ：有限集合 $\cdots$ 入力文字の集合（“alphabet”）
- $\delta : Q\times\Sigma \longrightarrow Q$：遷移関数
- $s\in Q$ $\cdots$ 初期状態
- $F\subset Q$ $\cdots$ 受理状態の集合

(決定性) 有限オートマトンによる語の受理

有限オートマトン $M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ が語 $w=a_1a_2\cdots a_n\in\Sigma^*$ を受理 (accept) する

$\Longleftrightarrow \exists r_0,r_1,\ldots,r_n\in Q:$

- $r_0=s$
- $\delta(r_{i-1},a_i)=r_i\ (i=1,\ldots,n)$
- $r_n\in F$

非決定性有限オートマトン $M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ の形式的定義

- Q：有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- Σ：有限集合 $\cdots$ alphabet, $\quad \Sigma_\varepsilon := \Sigma\cup\{\varepsilon\}$
- $\delta : Q\times\Sigma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$：遷移関数 $\quad\cdots$ 可能な遷移先全体の集合
  （$\mathcal{P}(Q)$ は Q の冪集合）
- $s\in Q$ $\cdots$ 初期状態
- $F\subset Q$ $\cdots$ 受理状態の集合

非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン $M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ が語 $w\in\Sigma^*$ を受理する

$\Longleftrightarrow \exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in\Sigma_\varepsilon, \exists r_0,r_1,\ldots,r_n\in Q:$

- $w=a_1a_2\cdots a_n$
- $r_0=s$
- $r_i\in\delta(r_{i-1},a_i)\ (i=1,\ldots,n)$
- $r_n\in F$

決定性有限オートマトンと非決定性有限オートマトンとの同等性

与えられた非決定性有限オートマトン $M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ に対し、M が認識する言語 $L(M)$ を認識する決定性有限オートマトン $\widetilde{M}:=(\widetilde{Q},\Sigma,\widetilde{\delta},\widetilde{s},\widetilde{F})$ が次で構成できる：

まず、各状態 $q\in Q$ に対し、$E(q)\subset Q$ を次で定める：

$$E_0(q):=\{q\},\quad E_{i+1}(q):=\bigcup_{r\in E_i(q)}\delta(r,\varepsilon),\quad E(q):=\bigcup_{i\geq 0}E_i(q)$$

（$E(q)$ は状態 q から入力を何も読まずに遷移できる状態全体）

- $\widetilde{Q}:=\mathcal{P}(Q)$：現在あり得る状態全体の集合
- $\widetilde{\delta}:\widetilde{Q}\times\Sigma\longrightarrow\widetilde{Q}$ $\qquad$：$\widetilde{q}$ の何処かから入力 x で遷移できる状態全体

$$(\widetilde{q},x)\longmapsto\widetilde{\delta}(\widetilde{q},x):=\bigcup_{q\in\widetilde{q}}\left(\bigcup_{r\in\delta(q,x)}E(r)\right)$$

- $\widetilde{s}:=E(s)$
- $\widetilde{F}:=\{\widetilde{q}\in\widetilde{Q}\,|\,\widetilde{q}\cap F\neq\emptyset\}$ ：あり得る状態のどれかが受理状態

正規言語に対する Pumping Lemma（注入補題・反復補題）

正規言語 A に対し、

$\exists n \in \boldsymbol{N} : \forall w \in A, |w| \geq n : \exists x, y, z \in \Sigma^*, w = xyz$ s.t.

(1) $y \neq \varepsilon$

(2) $|xy| \leq n$

(3) $\forall k \geq 0 : xy^k z \in A$

非決定性プッシュダウンオートマトン $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ の形式的定義

- Q：有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- Σ：有限集合 $\cdots$ alphabet, $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- Γ：有限集合 $\cdots$ stack alphabet, $\Gamma_\varepsilon := \Gamma \cup \{\varepsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$：遷移関数（非決定的）　$\cdots$ 可能な遷移先全体の集合
- $s \in Q$ $\cdots$ 初期状態
- $F \subset Q$ $\cdots$ 受理状態の集合

生成文法における Chomsky の標準形

- 正規言語の生成規則は次の形に出来る
  - ⋆ $X \longrightarrow xY \ (X, Y \in V, x \in \Sigma)$
  - ⋆ $X \longrightarrow x \ (X \in V, x \in \Sigma_\varepsilon)$
- 文脈自由言語の生成規則は次の形に出来る
  - ⋆ $X \longrightarrow YZ \ (X, Y, Z \in V)$
  - ⋆ $X \longrightarrow x \ (X \in V, x \in \Sigma_\varepsilon)$

文脈自由言語に対する Pumping Lemma

文脈自由言語 A に対し、

$\exists n \in \boldsymbol{N} : \forall w \in A, |w| \geq n : \exists u, v, x, y, z \in \Sigma^* : w = uvxyz$ s.t.

(1) $vy \neq \varepsilon$

(2) $|vxy| \leq n$

(3) $\forall k \geq 0 : uv^k xy^k z \in A$