

## 代表的な計算モデル

- 有限オートマトン (有限状態機械)
- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン



定理 :

L : 正規言語



L が或る有限オートマトンで認識される

このような一般論を考えるには、  
有限オートマトンの概念を  
少し一般化する方が良い

… **非決定性有限オートマトン**  
(**Non-deterministic finite automaton**)

## 非決定性有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- $Q$  : 有限集合 ... 状態の集合
- $\Sigma$  : 有限集合 ... **alphabet**,  $\Sigma_\epsilon := \Sigma \cup \{\epsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  : 遷移関数  
... 可能な遷移先全体の集合を与える
- $s \in Q$  ... 初期状態
- $F \subset Q$  ... 受理状態の集合

## 非決定性有限オートマトンによる語の受理

### 非決定性有限オートマトン

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

が、語  $w \in \Sigma^*$  を受理する



$$\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma_\varepsilon : w = a_1 a_2 \dots a_n$$

$$\exists r_0, r_1, \dots, r_n \in Q :$$

- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ )
- $r_n \in F$

$L(M)$  :  $M$  が受理する語の全体

…  $M$  が認識する言語

## 定理

言語  $L$  に対し、次は同値：

- (1)  $L$  : 正規言語
- (2)  $L$  が或る非決定性有限オートマトンで  
認識される
- (3)  $L$  が或る決定性有限オートマトンで  
認識される

(3)  $\Rightarrow$  (2) : ほぼ自明

(1)  $\Rightarrow$  (2) : 正規言語の帰納的定義に沿って構成

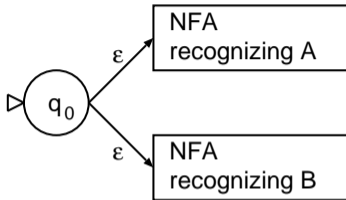
## 正規言語を認識する NFA の構成

正規言語：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

- (1) 言語  $L(\emptyset), L(\varepsilon), L(a)$  を認識する NFA を構成
- (2) 言語  $A, B$  を認識する NFA から、  
言語  $A \cup B, A \circ B, A^*$  を認識する NFA を構成

## $A \cup B$ を認識する非決定性有限オートマトンの構成



これを形式的な定式化の下で書き下すには？

$A$  を認識する **NFA**  $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$

$B$  を認識する **NFA**  $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$

→  $A \cup B$  を認識する **NFA**  $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

を構成



## 言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA の構成

A を認識する NFA  $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$

B を認識する NFA  $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$

から

$A \cup B, A \circ B, A^*$  を認識する NFA を構成

## 定理

言語  $L$  に対し、次は同値：

- (1)  $L$  : 正規言語
- (2)  $L$  が或る **NFA** で認識される
- (3)  $L$  が或る **DFA** で認識される

(2)  $\Rightarrow$  (1) : **NFA** から正規表現を復元  
( 矢印に正規表現が付いた、  
或る種の一般化された **NFA** を考える )

(2)  $\Rightarrow$  (3) : **NFA**  $M$  に対し、  
 $L(M)$  を認識する **DFA**  $\widetilde{M}$  を構成

## 定理

言語  $L$  に対し、次は同値：

- (1)  $L$  : 正規言語
- (2)  $L$  が或る **NFA** で認識される
- (3)  $L$  が或る **DFA** で認識される

(2)  $\Rightarrow$  (1) : **NFA** から正規表現を復元  
( 矢印に正規表現が付いた、  
或る種の一般化された **NFA** を考える )

(2)  $\Rightarrow$  (3) : **NFA**  $M$  に対し、  
 $L(M)$  を認識する **DFA**  $\widetilde{M}$  を構成

## DFA と NFA との同等性

非決定性有限オートマトン

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$  に対し、

$L(M)$  を認識する決定性有限オートマトン

$\tilde{M} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$  を構成

アイデア：

非決定性モデルでも決定的に定まるものは何か？

## DFA と NFA との同等性

非決定性有限オートマトン

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$  に対し、

$L(M)$  を認識する決定性有限オートマトン

$\tilde{M} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$  を構成

アイデア：

非決定性モデルでも決定的に定まるものは何か？

## 定理

言語  $L$  に対し、次は同値：

- (1)  $L$  : 正規言語
- (2)  $L$  が或る **NFA** で認識される
- (3)  $L$  が或る **DFA** で認識される







## 有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語  $A \subset \Sigma^*$  に対し、  
A を認識する有限オートマトン  $M$   
が存在するか？

→

言語  $A$  が

正規言語である (FA で認識される) かどうか、  
の良い判定基準は？

## 集合・写像などの言葉を用いて記述する練習

演習問題 2:  $\Sigma$  を alphabet とする。以下を記述せよ。

(3)  $L$  : 言語

- (a) 文字  $a \in \Sigma$  に対し、語に左 (resp. 右) から文字  $a$  を接続させる写像  $l_a$  (resp.  $r_a$ )
- (b) 語  $w \in \Sigma^*$  に対し、語に左 (resp. 右) から文字列  $w$  を接続させる写像  $l_w$  (resp.  $r_w$ ) (語の長さ  $|w|$  に関する帰納的定義で)
- (c) 語  $w \in \Sigma^*$  の後に接続すると  $L$  の元になる語全体の成す集合  $S_L(w)$  を与える写像  $S_L$

(4)  $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$  : 有限オートマトン

- (a) 状態  $q \in Q$  にいる所から出発して語  $w \in \Sigma^*$  を読んだ後の状態  $\tilde{\delta}(q, w)$  を与える写像  $\tilde{\delta}$  (語の長さ  $|w|$  に関する帰納的定義で)
- (b) 特に、 $M$  が語  $w \in \Sigma^*$  を読んだ後の状態を与える写像  $\tilde{\delta}_0$
- (c)  $M$  が認識する言語  $L(M)$
- (d) 状態  $q \in Q$  にいる所から出発して、その後に読めば受理される語全体の成す集合  $\varphi_M(q)$  を与える写像  $\varphi_M$