代表的な計算モデル

- 有限オートマトン（有限状態機械）
- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ **正規言語・正規表現**

定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る有限オートマトンで認識される

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い

$\cdots$ **非決定性**有限オートマトン
(Non-deterministic finite automaton)

非決定性有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q ：有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- Σ ：有限集合 $\cdots$ alphabet, $\quad \Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$ ：遷移関数
  $\cdots$ 可能な遷移先全体の集合を与える
- $s \in Q$ $\cdots$ 初期状態
- $F \subset Q$ $\cdots$ 受理状態の集合

非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

が、語 $w \in \Sigma^*$ **を受理する**

$$\Updownarrow$$

$\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in \Sigma_\varepsilon : w = a_1 a_2 \cdots a_n$

$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q :$

- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$
- $r_n \in F$

$L(M)$：M **が受理する語の全体**

$\cdots$ M **が認識する言語**

定理

言語 L に対し、次は同値：

(1) L：正規言語

(2) L が或る非決定性有限オートマトンで認識される

(3) L が或る決定性有限オートマトンで認識される

(3)$\Rightarrow$(2)：ほぼ自明

(1)$\Rightarrow$(2)：正規言語の帰納的定義に沿って構成

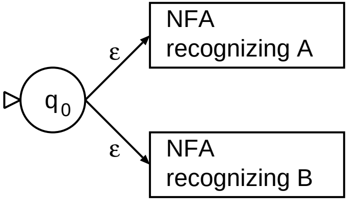
正規言語を認識する NFA の構成

正規言語：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

(1) 言語 $L(\emptyset), L(\varepsilon), L(a)$ を認識する NFA を構成
(2) 言語 A, B を認識する NFA から、
言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA を構成

$A \cup B$ を認識する非決定性有限オートマトンの構成



これを形式的な定式化の下で書き下すには？

A **を認識する NFA** $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$
B **を認識する NFA** $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$
$\longrightarrow$ $A \cup B$ **を認識する NFA** $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$
を構成

言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA の構成

A を認識する NFA $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$
B を認識する NFA $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$

から

$A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA を構成

定理
言語 L に対し、次は同値：
(1) L：正規言語
(2) L が或る NFA で認識される
(3) L が或る DFA で認識される

(2)$\Rightarrow$(1)：NFA から正規表現を復元
（矢印に正規表現が付いた、
或る種の一般化された NFA を考える）

(2)$\Rightarrow$(3)：NFA M に対し、
$L(M)$ を認識する DFA $\widetilde{M}$ を構成

DFA と NFA との同等性

非決定性有限オートマトン

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **に対し、**

$L(M)$ **を認識する決定性有限オートマトン**

$\widetilde{M} = (\widetilde{Q}, \Sigma, \widetilde{\delta}, \widetilde{s}, \widetilde{F})$ **を構成**

アイデア：

非決定性モデルでも決定的に定まるものは何か？

定理

言語 L に対し、次は同値：

(1) L：正規言語

(2) L が或る NFA で認識される

(3) L が或る DFA で認識される

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ 正規言語・正規表現

有限オートマトンで認識できないない言語が存在する !!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

$\longrightarrow$

言語 A が
正規言語である（FA で認識される）かどうか、
の良い判定基準は？

集合・写像などの言葉を用いて記述する練習

演習問題2：Σ **を alphabet とする。以下を記述せよ。**

(3) L **：言語**

(a) **文字** $a \in \Sigma$ **に対し、語に左（resp. 右）から文字** a **を連接させる写像** ℓ_a **(resp.** r_a**)**

(b) **語** $w \in \Sigma^*$ **に対し、語に左（resp. 右）から文字列** w **を連接させる写像** ℓ_w **(resp.** r_w**)（語の長さ** $|w|$ **に関する帰納的定義で）**

(c) **語** $w \in \Sigma^*$ **の後に連接すると** L **の元になる語全体の成す集合** $S_{\mathrm{L}}(w)$ **を与える写像** S_{L}

(4) $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **：有限オートマトン**

- **(a)** **状態** $q \in Q$ **にいる所から出発して語** $w \in \Sigma^*$ **を読んだ後の状態** $\widetilde{\delta}(q, w)$ **を与える写像** $\widetilde{\delta}$ **（語の長さ** $|w|$ **に関する帰納的定義で）**
- **(b)** **特に、**M **が語** $w \in \Sigma^*$ **を読んだ後の状態を与える写像** $\widetilde{\delta}_0$
- **(c)** M **が認識する言語** $L(M)$
- **(d)** **状態** $q \in Q$ **にいる所から出発して、その後に読めば受理される語全体の成す集合** $\varphi_M(q)$ **を与える写像** φ_M