

有限オートマトンでの計算可能性問題

定理 :

L : 正規言語



L が或る有限オートマトンで認識される

実は、
有限オートマトンで認識できない言語が存在する !!
(\iff 正規でない言語が存在する)

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
A を認識する有限オートマトン M
が存在するか？

→

言語 A が
正規言語である (FA で認識される) かどうか、
の良い判定基準は？

集合・写像などの言葉を用いて記述する練習

演習問題 2: Σ を alphabet とする。以下を記述せよ。

(3) L : 言語

- (a) 文字 $a \in \Sigma$ に対し、語に左 (resp. 右) から文字 a を接続させる写像 l_a (resp. r_a)
- (b) 語 $w \in \Sigma^*$ に対し、語に左 (resp. 右) から文字列 w を接続させる写像 l_w (resp. r_w) (語の長さ $|w|$ に関する帰納的定義で)
- (c) 語 $w \in \Sigma^*$ の後に接続すると L の元になる語全体の成す集合 $S_L(w)$ を与える写像 S_L

(4) $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$: 有限オートマトン

- (a) 状態 $q \in Q$ にいる所から出発して語 $w \in \Sigma^*$ を読んだ後の状態 $\tilde{\delta}(q, w)$ を与える写像 $\tilde{\delta}$ (語の長さ $|w|$ に関する帰納的定義で)
- (b) 特に、 M が語 $w \in \Sigma^*$ を読んだ後の状態を与える写像 $\tilde{\delta}_0$
- (c) M が認識する言語 $L(M)$
- (d) 状態 $q \in Q$ にいる所から出発して、その後に読めば受理される語全体の成す集合 $\varphi_M(q)$ を与える写像 φ_M

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できる

\iff “待ち” が有限種類

$\ell_w : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^* : \text{“左平行移動”}$

$$v \longmapsto wv$$

言語 $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ に対し、

$S_L : \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*) : \text{“待ち” の集合}$

$$w \longmapsto \{v \in \Sigma^* \mid wv \in L\} = \ell_w^{-1}(L)$$

$$\#\text{Im}S_L < \infty \iff \exists M : L = L(M)$$

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できない言語が存在する!!
(\iff 正規でない言語が存在する)

例: $A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ (a と b との個数が同じ)
実際 $w_n = a^n b$ に対する $S_L(w_n)$ が全て異なる

一般には、証明には部屋割り論法
(の一種の **pumping lemma**)
を利用することが多い

Pumping Lemma (注入補題・反復補題)

正規言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、

$\exists n \in \mathbb{N} :$

$\forall w \in A, |w| \geq n :$

$\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz$

(1) $y \neq \varepsilon$

(2) $|xy| \leq n$

(3) $\forall k \geq 0 : xy^kz \in A$

有限オートマトンで認識できる / ない言語の例

$$\Sigma = \{a, b\}$$

- a と b との個数が同じ
- a が幾つか続いた後に b が幾つか続いたもの
- a, b が交互に並んで、a で始まり b で終わる
- 同じ文字列 2 回の繰返しから成る
- 回文 (palindrome)

などなど

このうちで、

有限オートマトンで認識できる言語は？

有限オートマトンで認識できない言語が存在する



より強力な計算モデルが必要



- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

有限オートマトンで認識できない言語が存在する



有限オートマトンより強力な計算モデル



正規言語より広い範囲の言語を扱う



生成規則による言語の記述（生成文法）

例：“文法に適っている”数式とは
どのようなものか？

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- 単独の文字（変数名）は式
- 式と式とを演算子で繋いだものは式
- 式を括弧で括ったものは式
- それだけ

→ これは式を作り出す規則とも考えられる

“文法に適っている” 数式

初期記号 (開始変数) E から出発して、
次の規則のいずれかを
“非決定的に” 適用して得られるもののみ

- $E \rightarrow A$
- $E \rightarrow EBE$
- $E \rightarrow (E)$
- $A \rightarrow$ 変数名のどれか
- $B \rightarrow$ 演算子のどれか
- 変数名・演算子・ (\cdot) は
それ以上書換ええない (終端記号)

→ 生成規則 (書換規則)

生成規則・生成文法

生成規則を与えることでも

言語を定めることが出来る

→ 生成文法 (**generative grammar**)

生成規則による“文法に適っている”語の生成

- 初期変数を書く
- 今ある文字列中の或る変数を
生成規則のどれかで書換える
- 変数がなくなったら終わり