

有限オートマトンで認識できない言語が存在する



より強力な計算モデルが必要



- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

有限オートマトンで認識できない言語が存在する



有限オートマトンより強力な計算モデル



正規言語より広い範囲の言語を扱う



生成規則による言語の記述（生成文法）

例：“文法に適っている”数式とは
どのようなものか？

簡単のため二項演算子のみ考えることにすれば、

- 単独の文字（変数名）は式
- 式と式とを演算子で繋いだものは式
- 式を括弧で括ったものは式
- それだけ

→ これは式を作り出す規則とも考えられる

“文法に適っている” 数式

初期記号 (開始変数) E から出発して、
次の規則のいずれかを
“非決定的に” 適用して得られるもののみ

- $E \rightarrow A$
- $E \rightarrow EBE$
- $E \rightarrow (E)$
- $A \rightarrow$ 変数名のどれか
- $B \rightarrow$ 演算子のどれか
- 変数名 \cdot 演算子 $\cdot (\cdot)$ は
それ以上書換ええない (終端記号)

→ 生成規則 (書換規則)

生成規則・生成文法

生成規則を与えることでも

言語を定めることが出来る

→ 生成文法 (**generative grammar**)

生成規則による“文法に適っている”語の生成

- 初期変数を書く
- 今ある文字列中の或る変数を
生成規則のどれかで書換える
- 変数がなくなったら終わり

例： $\{a^{2n}b^{2m+1} \mid n, m \geq 0\}$

(a が偶数個 (0 個も可) 続いた後に、
 b が奇数個続く)

正規表現で表すと、 $(aa)^*b(bb)^*$

- $S \rightarrow aaS$
- $S \rightarrow bB$
- $B \rightarrow bbB$
- $B \rightarrow \varepsilon$

まとめて次のようにも書く

- $S \rightarrow aaS \mid bB$
- $B \rightarrow bbB \mid \varepsilon$

文脈自由文法 (context-free grammar)

文脈が全て空列 ε

即ち、規則が全て $A \rightarrow w$ ($A \in V$) の形

文脈自由文法の形式的定義

- V : 有限集合 (変数の集合)
- Σ : 有限集合 (終端記号の集合)
ここに $V \cap \Sigma = \emptyset$
- R : 有限集合 $\subset V \times (V \cup \Sigma)^*$ (規則の集合)
- $S \in V$: 開始変数

$(A, w) \in R$ が生成規則 $A \rightarrow w$ を表す

例：言語 $A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ は
正規言語ではないが文脈自由言語である

- $S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$

従って、

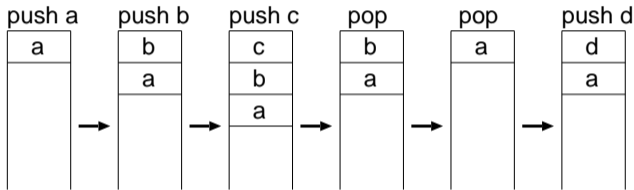
文脈自由言語は正規言語より真に広い!!

さて、正規言語を計算するモデルが
有限オートマトンであった

文脈自由言語を計算するモデル
… プッシュダウンオートマトン

プッシュダウンオートマトン

(非決定性)有限オートマトンに
プッシュダウンスタックを取り付けたもの



無限（非有界）の情報を保持できるが、
読み書きは先頭だけ

… LIFO (Last In First Out)

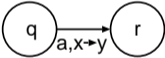
プッシュダウンオートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$$

- Q : 有限集合 … 状態の集合
- Σ : 有限集合 … **alphabet**
- Γ : 有限集合 … **stack alphabet**
 $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\Gamma_\varepsilon := \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ と置く
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$
: 遷移関数 (非決定的) … 可能な遷移先全体
- $s \in Q$ … 初期状態
- $F \subset Q$ … 受理状態の集合

$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$$

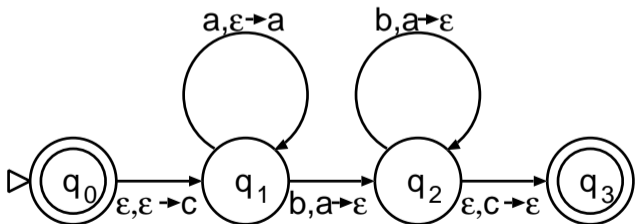
- $(r, y) \in \delta(q, a, x)$ とは、
「入力 a を読んだとき、
状態 q でスタックの先頭が x なら、
スタックの先頭を y に書換えて、
状態 r に移って良い」
ということ (pop; push y)

状態遷移図では  で表す

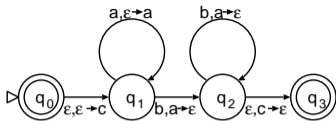
- $x = y$ は書き換え無し
- $x = \varepsilon$ は (スタックの先頭を見ずに) push のみ
- $y = \varepsilon$ は pop のみ
- $a = \varepsilon$ は入力を読まずに遷移

例：言語 $A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ を認識する
プッシュダウンオートマトン

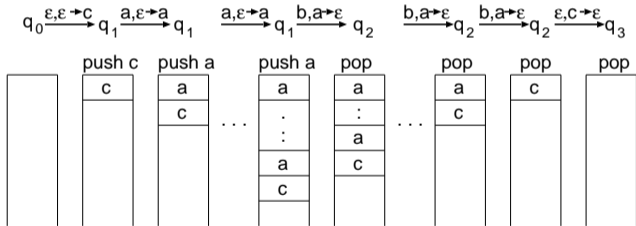
$\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, c\}$



PDA



による
文字列 $a^n b^n$ の受理



スタックマシン

このように

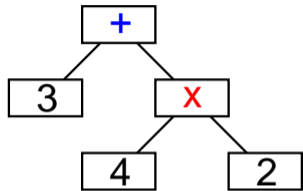
記憶場所としてプッシュダウンスタックを備えた
計算モデルや仮想機械・処理系を

一般に**スタックマシン**という

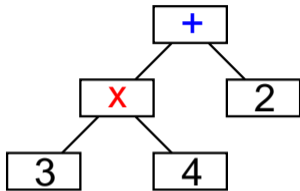
例：

- 逆ポーランド電卓
- **PostScript**

式と演算木



$$3+4 \times 2$$



$$3 \times 4+2$$

Mathematica などの

数式処理（計算機代数）ソフトウェア

(Computer Algebra System, CAS) では、

通常、内部的に数式の木構造を保持

演算木の表記

演算子を置く場所により、中置・前置・後置がある

| 中置 | 前置 | 後置 |
|--------------------|------------------|------------------|
| $3 + 4 \times 2$ | $+ 3 \times 4 2$ | $3 4 2 \times +$ |
| $(3 + 4) \times 2$ | $\times + 3 4 2$ | $3 4 + 2 \times$ |
| $3 \times 4 + 2$ | $+ \times 3 4 2$ | $3 4 \times 2 +$ |

後置記法（逆ポーランド記法）

| 後置 | 日本語 |
|----------------------|------------------------|
| $3\ 4\ 2\ \times\ +$ | 3 に 4 に 2 を掛けたものを足したもの |
| $3\ 4\ +\ 2\ \times$ | 3 に 4 を足したものに 2 を掛けたもの |
| $3\ 4\ \times\ 2\ +$ | 3 に 4 を掛けたものに 2 を足したもの |



スタックを用いた計算に便利

後置記法の演算式のスタックを用いた計算

(逆ポーランド電卓)

- 数値 \implies **push**
- 演算子 \implies 被演算子を (所定の個数だけ) **pop**
 \longrightarrow 演算を施し、結果を **push**
- 入力終了 \implies **pop**
 \longrightarrow スタックが丁度空になったらその値が答え

問：後置記法 (逆ポーランド記法) の式に対し
スタックを用いて値を計算する

アルゴリズムを実装せよ

後置記法の有利性

後置記法の演算式が簡明に計算できるのは、

(各演算子に対して
被演算子の個数が決まっていれば)

括弧が**必要ない** (優先順位を考慮しなくてよい)

ことが大きく効いている

- 式 :: 定数 || 変数 || 式 式 二項演算子
(+ も × も区別なし)

中置記法と演算子の優先順位

中置記法の演算式には括弧が必要

(演算子の優先順位を定めておく必要あり)

$$3 \times 4 + 2$$

$$3 + 4 \times 2$$

計算する際には優先順位を考慮する必要がある

- 式 :: 項 || 項 + 式
- 項 :: 因子 || 因子 × 項
- 因子 :: 定数 || 変数 || (式)

(+ と × とで純然たる区別あり)

スタックマシンの例：PostScript

ページ記述言語の一つ

- Adobe Systems が開発
- PDF (Portable Document Format) の元になった言語
- レーザプリンタなどで実装
- オープンソースなインタプリタとして Ghostscript が良く利用されている
- 図形を描いたりフォントを置いたりする
- 逆ポーランド記法

スタックマシンの例：PostScript

逆ポーランド記法

- データを **push**
- 命令（演算子, **operator**）が
所定数のデータ（被演算子, **operand**）を
pop して処理

例：(100, 200) から (300 + 50, 400) へ、
引続き (200, 600 - 50) へ線を引く

```
100 200 moveto  
300 50 add 400 lineto  
200 600 50 sub lineto  
stroke
```