

普遍チューリングマシン

全てのチューリングマシンの動作を模倣する

- 入力： $(\langle M \rangle, w)$
 - ★ $\langle M \rangle$ ：機械 M の符号化（プログラムに相当）
 - ★ w ： M に与える入力データ

- 出力：機械 M が入力 w を受理するかどうか

普遍チューリングマシン

普遍チューリングマシンとは、
言語

$$A_{\text{TM}} = \left\{ (\langle M \rangle, w) \mid \begin{array}{l} \langle M \rangle : \text{TM } M \text{ の符号化} \\ M \text{ が入力 } w \text{ を受理} \end{array} \right\}$$

を認識するチューリングマシン

普遍チューリングマシンが存在

$\iff A_{\text{TM}}$ がチューリングマシンで認識可能

定理

言語

$$A_{\text{TM}} = \left\{ (\langle M \rangle, w) \mid \begin{array}{l} \langle M \rangle : \text{TM } M \text{ の符号化} \\ M \text{ が入力 } w \text{ を受理} \end{array} \right\}$$

は認識可能だが、判定可能ではない。

証明は一種の対角線論法による
(Russell のパラドックス風)

A_{TM} の判定不可能性

A_{TM} を判定する TM U があったとする。

入力 $\langle M \rangle$ に対し、

- M が $\langle M \rangle$ を受理するなら拒否
- M が $\langle M \rangle$ を拒否するなら受理

となる TM D が (U を使って) 作れる。

これに、入力 $\langle D \rangle$ を喰わせよ。

対角線論法が出てきたついでに...

対角線論法の例：冪集合の濃度

集合 X の冪集合 (power set)

$$\mathcal{P}(X) = \{S \mid S \subset X\}$$

について、

$$\#X \not\leq \#\mathcal{P}(X)$$

集合の濃度

集合 A, B に対し、

$$A \prec B \iff \exists \iota : A \longrightarrow B : \text{単射}$$

$$\iff \exists \pi : B \longrightarrow A : \text{全射}$$

(\iff には選択公理が必要)

$$A \sim B \iff \exists \varphi : A \longrightarrow B : \text{全単射}$$

$$\iff A \prec B \text{ かつ } B \prec A$$

(Bernstein の定理)

\sim は “集合全体の集まり” の上の “同値関係”

集合の濃度

A の属する “同値類” : A の濃度 (cardinality)
($\#A, |A|, \text{card}(A)$ 等と書く)

- $\aleph_0 = \aleph := \#\mathbb{N}$: 可算濃度 (可付番濃度)
(countable, enumerable)
- $\aleph = \mathfrak{c} := \#\mathbb{R}$: 連続体濃度 (continuum)

濃度の比較 : $\#A \leq \#B \iff A \prec B$

- $\#A \leq \#A$
 - $\#A \leq \#B, \#B \leq \#A \implies \#A = \#B$
 - $\#A \leq \#B, \#B \leq \#C \implies \#A \leq \#C$
- (\leq は濃度の間 “順序関係” である)

対角線論法の例：冪集合の濃度

集合 X の冪集合 (power set)

$$\mathcal{P}(X) = \{S \mid S \subset X\}$$

について、

$$\#X \leq \# \mathcal{P}(X)$$

応用：

$$\begin{aligned} \# \mathbb{N} = \# \mathbb{Q} = \aleph_0 & \text{ (可算濃度) だが、} \\ \# \mathbb{R} = \# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \aleph & \not\approx \aleph_0 \text{ (連続体濃度)} \end{aligned}$$

注： \aleph は \aleph_0 の次の大きさ、とは言えない
(連続体仮説)

定理

チューリングマシンで認識可能でない言語が存在する。

- チューリングマシン全体の集合
- 言語全体の集合

の濃度とを比較せよ

さて、本講義最後の話題は、

計算量

について

問題の難しさを如何に計るか？

Church-Turing の提唱（再掲）

「全てのアルゴリズム（計算手順）は、
チューリングマシンで実装できる」

（アルゴリズムと呼べるのは
チューリングマシンで実装できるものだけ）

… 「アルゴリズム」の定式化

計算量 (complexity)

- **時間計算量**：計算に掛かるステップ数
(TM での計算の遷移の回数)
- **空間計算量**：計算に必要なメモリ量
(TM での計算で使うテープの区画数)

通常は、決まった桁数の四則演算 1 回を
1 ステップと数えることが多い

入力データ長 n に対する
増加のオーダー (Landau の O -記号) で表す

Landau の O-記号・o-記号

$f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ に対し、

$$f = O(g) \iff \exists N \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \\ (n \geq N \implies f(n) \leq Cg(n))$$

$$f = o(g) \iff \frac{f(n)}{g(n)} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \\ (n \geq N \implies f(n) \leq \varepsilon g(n))$$

計算量 (complexity)

問題を解くアルゴリズムによって決まる

… アルゴリズムの計算量

→ アルゴリズムの効率の評価

問題の計算量：

その問題を解くアルゴリズムの計算量の下限

最も効率良く解くと、どれ位で解けるか

= どうしてもどれ位必要か

= どれ位難しい問題か

→ 問題の難しさの評価