

次回演習までの答案の採点・添削・返却が難しいことと、答案（の文字および内容）を整理して適切に清書する練習を兼ねて、問題は一旦各自のノートに解き、その後に配布する答案用紙に清書して提出することを勧める。提出分の問題については次の回に補足解説をすることがあるが、その際は各自で自分が解いたノートの答案を参照せよ。提出した答案は授業時には返却しないので、返却希望者は別途申し出よ。

適当な場合に板書発表を促す。板書発表時は、学生番号・氏名を付記すること。授業参画の評価に含めるので、意欲的・積極的な参画を望む。

基本的には講義「数学 BI (微分積分)」の内容の理解を深める演習を行なうが、初回はまだ講義内容が余り進んでいないので、復習（思い出し）を兼ねて、高校までの知識で取り組める（が、大学受験の範囲からは少し踏み出すかもしれない）内容の演習とする。

1. 微分・積分の計算 (04/15)

問 1-1. 関数 $f(x) = x^n e^{-x}$ (n は自然数) に対し、

- (1) 導関数 $f'(x)$ および 2 階の導関数 $f''(x)$ を計算せよ。
- (2) $n = 0, 1, 2$ に対し、 $y = f(x)$ のグラフを描け。 $(x \geq 0$ の範囲のみでもよい。増減・凹凸に加え、 $x \rightarrow +\infty$ での極限にも留意せよ。)

問 1-2. 関数 $f(x) = x^n \log x$ (n は自然数) に対し、

- (1) 導関数 $f'(x)$ および 2 階の導関数 $f''(x)$ を計算せよ。
- (2) 定積分によって定まる関数 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ を計算せよ。(ヒント：部分積分)
- (3) $n = 0, 1, 2$ に対し、 $y = f(x)$ のグラフを描け。(増減・凹凸に加え、 $x \rightarrow +0$ および $x \rightarrow +\infty$ での極限にも留意せよ。)

問 1-3. 自然数 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し、

$$I_n(x) := \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

とおく。

- (1) $I_0(x)$ を求めよ。
- (2) 部分積分により、 $I_n(x)$ の満たす漸化式を求めよ。
- (3) $I_1(x), I_2(x), I_3(x)$ を求めよ。
- (4) $I_n(x)$ をうまく書き表してみよ。

問 1-4. 定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の値を求めよう。

- (1) I_0, I_1 を求めよ。
- (2) $\sin^n x$ の導関数を求めよ。
- (3) $\sin^n x = \sin x \sin^{n-1} x$ と見て部分積分することにより、 I_n, I_{n-2} の関係式を求めよ。
- (4) I_n を求めよ。

問 1-5. 関数 $f(x) = e^{-ax} \sin bx, g(x) = e^{-ax} \cos bx$ (a, b は正の実数) に対し、

- (1) 導関数 $f'(x), g'(x)$ および 2 階の導関数 $f''(x), g''(x)$ を計算せよ。
- (2) 正の実数 t に対し、定積分

$$I(t) := \int_0^t f(x) dx, \quad J(t) := \int_0^t g(x) dx$$

を求めよ。

- (3) $t \rightarrow +\infty$ での $I(t), J(t)$ の極限を求めよ。