

3. TAYLOR 展開の計算と利用 (05/23)

3-14A. $f(x) = e^{-x}$ の Taylor 展開 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について、

- (1) f の n 階導関数 $f^{(n)}$ を求め、 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ によって $f(x)$ の Taylor 展開を求めよ。
- (2) e^x の Taylor 展開と比較せよ。(これより e^x の Taylor 展開から e^{-x} の Taylor 展開が得られることが分かる。通常はこうして求めれば良い。)
- (3) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2}$ を求めよ。

3-15B. $f(x) = e^{2x}$ について、

- (1) Taylor 展開を求めよ。
- (2) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$ を求めよ。

3-16A. 次の関数の Taylor 展開を求めよ。

- (1) $\sin x \cos x$
- (2) $\frac{1}{1 - 5x + 6x^2}$

3-17B. 次の関数の Taylor 展開を次の二通りの方法で x^4 の項まで (意欲があればもっと) 求めよ。(結果を比較して確認せよ。他の方法も思い付いたら試してみよ。)

- (1) $e^{x - \frac{x^2}{2}} = \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$
 - (a) e^t の Taylor 展開に $t = x - \frac{x^2}{2}$ を代入して
 - (b) $e^{x - \frac{x^2}{2}} = e^x e^{-\frac{x^2}{2}}$ と見て、それぞれの Taylor 展開の掛け算で
- (2) $\frac{1}{1 - x - x^2}$
 - (a) 筆算方式の割り算 (または組立除法) で
 - (b) $1 - x - x^2$ を因数分解して、部分分数に分解し、等比級数の和に展開して

3-18C. 次の関数の Taylor 展開を x^7 の項まで (意欲があればもっと) 求めよ。

- (1) $\sin^2 x$
- (2) $\cos^2 x$
- (3) $\tan x$

3-19A. 次の関数の Taylor 展開を求めよ。

- (1) $\log(1 - x)$
- (2) $\frac{1}{(1 - x)^2}$
- (3) $\sqrt[3]{1 + x}$

3-20B. 次の関数の Taylor 展開を指定された項まで (意欲があればもっと) 求めよ。(または一般項と総和記号 \sum を用いて表せ。)

- (1) $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (x^5 の項まで)
- (2) $\frac{1}{(1-x)^3}$ (x^4 の項まで)
- (3) $\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ (x^4 の項まで)

3-21A. Taylor 展開を用いて、次の関数の $x \rightarrow 0$ での極限值を求めよ。

- (1) $\frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$
- (2) $\frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[4]{1+x}}{x}$

3-22B. Taylor 展開を用いて、次の関数の $x \rightarrow 0$ での極限值を求めよ。

- (1) $\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$
- (2) $\frac{\log(1 - 2x) + 2x + 2x^2}{x^3}$
- (3) $\frac{(1-x)e^x - 1}{x^2}$