4-23A.　次の級数の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+n+2019}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+2019}{n^2}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{2019}}{2^n}$

4-24B.　次の級数の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}+1}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2019}{n^3}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+2019}{3^n}$

（結果のみでも良いが、その場合は、次の例のような級数のうち、どのような級数と収束・発散を共にするとして判定したかを明記せよ。

例：$\displaystyle\sum\frac{1}{n},\quad\sum\frac{1}{n^{1.5}},\quad\sum\frac{1}{n^2},\quad\sum\frac{1}{n^3},\quad\sum\frac{1}{2^n},\quad\sum\frac{1}{3^n},\quad\sum\left(\frac{2}{3}\right)^n$ など）

4-25A.　次の関数 f の Taylor 展開について、その収束半径 r を求めよ。また、$|x|=r$ で関数 f に何が起こっているか？

(1) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$　(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x-12x^2}$　(3) $f(x)=\log(1-2x)$

4-26B.　次の冪級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n5^n}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n3^nx^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$

4-27C.　次の関数 f の Taylor 展開について、その収束半径 r を求めよ。また、$|x|=r$ で関数 f に何が起こっているか？

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-12}$　(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

4-28B.　$\sin 1$ の近似値を Taylor 展開を利用して求めたい。Taylor の定理による剰余項の評価を用いて、誤差の評価を付けて求めよう。

（必要なら、裏面にある $n!, 1/n!$ の表を利用せよ。）

$f(x)=\sin x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f;x)$ について、

(1) 剰余項 $R_N(f;x)$ の具体形を記せ。
(2) $|R_N(f;1)|<10^{-7}$ となる（出来ればなるべく小さい）N を与えよ。
(3) $\sin 1$ の近似値を小数第 6 位まで求めよ。
(4) 誤差が 10^{-6} 以下であることを保証せよ。但し、各項の四捨五入による誤差（丸め誤差）・剰余項を無視したことによる誤差（打切誤差）の双方を考慮に入れよ。

（意欲のある人はもう一桁多く小数第 7 位まで求めてみよ。その場合、(2) に当たる部分はどうすれば良いか。）

以下の数問は、ε-δ 流の数列の収束・極限の証明の練習。

4-29A.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$ となることを示せ。

4-30B.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$ となることを示せ。

4-31C.　前問の状況で、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$ となることを示せ。

4-32C.　数列 $\boldsymbol{a}=(a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha>0$ であるとき、或る自然数 $N\in\boldsymbol{N}$ と正の実数 $c>0$ とが存在して、$n\geq N$ となる任意の自然数 n に対し $a_n>c>0$ となることを示せ。

4-33D.　前問の状況で、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\alpha}$ となることを示せ。（ヒント：評価の中で前問を用いる。）

4-34D.　各項 a_n が正 $(a_n>0)$ である数列 $\boldsymbol{a}=(a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ であるとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{\alpha}$ となることを示せ。

4-35C.　級数 $S=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ の収束・発散を判定したい。

(1) $(\log\log x)' =$ ？

(2) 関数 $\dfrac{1}{x\log x}$ の積分と級数 S との比較により、級数 S の収束・発散を判定せよ。

4-36C.　級数 $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ について、部分和を $S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ とおく。

(1) 積分 $\displaystyle\int_1^N \frac{1}{x^2}dx$ を用いて S_N を上から評価することにより、級数 S が収束することを示せ。

(2) $n\geq 2$ に対して $\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$ であることを用いて、S_N を上から評価することにより、級数 S が収束することを示せ。

以下、電卓等利用可。近似値の計算では、少なくとも打切誤差の評価（収束の速さ）については考慮せよ。

4-37C.　$f(x)=\log(1+x)$ の Taylor 展開を用いて、log の値の近似値を求めることを考えよう。

(1) $\log 1.1$ の近似値を求めよ。

(2) $\log 1.21$ の近似値を求めよ。（直接 $x=0.21$ とおくのと、$\log 1.21=\log(1.1)^2=2\log 1.1$ を利用するのと、どちらが有利か。）

(3) 直接 $x=2$ とおいて $\log 3$ の近似値を求めることはできない。何故か？

4-38C.　$\log 3$ の近似値を求めるために、次のことを考えよう。

(1) $\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ の Taylor 展開を求めよ。

(2) これを利用して、$\log 3$ の近似値を求めよ。

4-39D.　$\log 1.5$ の近似値を求めるために、$\log(1+x)$ の Taylor 展開を用いるのと、$\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ の Taylor 展開を用いるのと、どちらが有利か。

n	$n!$	$1/n!$
0	1	1
1	1	1
2	2	0.5
3	6	0.166666666667
4	24	0.041666666667
5	120	0.008333333333
6	720	0.001388888889
7	5040	0.000198412698
8	40320	0.000024801587
9	362880	0.000002755732
10	3628800	0.000000275573
11	39916800	0.000000025052
12	479001600	0.000000002088
13	6227020800	0.000000000161
14	87178291200	0.000000000011