5-40C.　次で定まる関数 f について考える：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

(1) $x > 0$ の範囲で、$f'(x)$ を求めよ。
(2) f が $x = 0$ で微分可能であることを示せ。（ヒント：左側微分係数は 0 である。右側微分係数を定義に従って計算し、存在して 0 になることを示せ。）
(3) $n = 1, 2, \ldots$ に対し、f は n 回微分可能で、

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} \times \left(\dfrac{1}{x} \text{ の多項式} \right) & (x > 0) \end{cases}$$

の形になることを示せ。特に $f^{(n)}(0) = 0$ となる。
(4) f の形式的 Taylor 展開は 0 である。特に f と一致しない。

以下では、逆三角関数の値は主値

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

の範囲で考えよ。

5-41A.　次の値を主値で答えよ。
(1) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　(2) $\arctan 1$

5-42B.　次の値を主値で答えよ。
(1) $\arcsin \dfrac{1}{2}$　　(2) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　(3) $\arctan(-\sqrt{3})$

5-43A.　a を $|a| \leq 1$ なる実数とするとき、$\sin(\arccos a)$ を求めよ。
5-44B.　a を実数とするとき、$\sin(\arctan a)$ を求めよ。
5-45B.　a を $0 < a < 1$ なる実数とするとき、$x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq a$ で定まる領域の面積を求めよ。

5-46A.　次で定義される関数を、それぞれ双曲正弦 (hyperbolic sine)・双曲余弦 (hyperbolic cosine)・双曲正接 (hyperbolic tangent) という（総称して双曲線関数という）：

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(1) 次の関係式を満たすことを示せ。
　(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
　(b) $(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x$
(2) $\sinh x$ の Taylor 展開を、一般項と総和記号 $\sum$ を用いて表せ。

5-47B.　双曲線関数について、

(1) $\cosh x$ の Taylor 展開を、一般項と総和記号 $\sum$ を用いて表せ。
(2) $\tanh x$ の Taylor 展開を、x^5 の項まで（意欲があればもっと）求めよ。
(3) 次の加法定理を導け：
  (a) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
  (b) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
(4) $\tanh(x+y)$ を $\tanh x, \tanh y$ で表せ。（tanh の加法定理）

5-48C.　e^x の Taylor 展開において、形式的に x を ix（i は虚数単位、$i^2=-1$）と置き換えた級数を考え、これを e^{ix} と書くことにする。

(1) 形式的に計算して実部・虚部に分けると、$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ の形になることを確かめよ。（複素数まで拡げて収束・極限等の定式化を整備することにより、この関係式は正当化され、「Euler の公式」と呼ばれる。詳しくは、「複素関数論」の授業などで扱う。）
(2) 次の関係式が成り立つ：

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \tan x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})}$$

(3) 上の関係式と指数法則とから、三角関数の加法定理を導け。

5-49A.　$y = \arcsin x$ について、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを示せ。従って、$\arcsin x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ である。

5-50B.　逆正弦関数 $\arcsin x$ について、

(1) $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$ を求めよ。（ヒント：$\arcsin x = (x)' \arcsin x$ と見て部分積分）
(2) $\arcsin x$ の Taylor 展開を求めよ。（一般項を書くか、最初の何項かの係数を具体的に求めよ。）（ヒント：$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ を二項展開してから項別積分）

5-51C.　双曲正弦関数 $\sinh x$ の逆関数 $\mathrm{arcsinh}\, x$ や、双曲正接関数 $\tanh x$ の逆関数 $\mathrm{arctanh}\, x$ について、上 2 問と同様の考察により、それぞれの Taylor 展開を求めてみよ。

5-52C.　双曲線 $C : x^2 - y^2 = 1$ 上の点 P の座標は $(\cosh t, \sinh t)$ と書ける。C 上の第 1 象限の点 $P(\cosh t, \sinh t)$ に対し、C 上の点 $A(1,0)$ から P に至る C 上の弧を γ とするとき、線分 OA、線分 OP、γ で囲まれた領域の面積 S を求めよ。（この結果を円 $x^2+y^2=1$ の場合と比べよ。）

5-53C.　放物線 $C : y = x^2$ について、

(1) 原点 $(0,0)$ から C 上の点 (t, t^2) までの弧長を求めよ。
(2) x 軸上をすべらずに C を転がすとき、C の焦点の軌跡を求めよ。