6. 定積分の基礎づけと計算 (07/04)

有界閉区間 $I=[a,b]$ で定義された有界な関数 f に対し、定積分 $\displaystyle\int_I f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ を次で定義する：

- 区間 I の分割 $\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ に対し、
  - ⋆ $I_i:=[x_{i-1},x_i]$ ：各小区間、$|I_i|:=x_i-x_{i-1}$ ：区間幅
  - ⋆ $\displaystyle m_i:=\inf_{x\in I_i}f(x), M_i:=\sup_{x\in I_i}f(x)$ ：区間 I_i に於ける f の下限・上限
  - ⋆ $\displaystyle s_\Delta:=\sum_{i=1}^n m_i|I_i|, S_\Delta:=\sum_{i=1}^n M_i|I_i|$ ：分割 Δ に関する上下からの見積もり
- $\displaystyle s:=\sup_\Delta s_\Delta$ ：下積分、$\displaystyle S:=\inf_\Delta S_\Delta$ ：上積分
- $s=S$ のとき、f は I で積分可能といい、$\displaystyle s=S=:\int_I f(x)dx$ と書く。

6-54A.　閉区間 $I=[0,2]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=1\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

を考える。区間 I の分割 $\Delta: 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$ に対し、各 I_i は $f(x)=0$ となる点 $x\in I_i$ を含むので、$m_i=0$ であり、従って、$s_\Delta=0$ である。これより、下積分は $s=0$ である。一方、$x=1$ を含む小区間 $I_k=[x_{k-1},x_k]$ については、$M_k=1>0$ であり、従って、$S_\Delta=|I_k|>0$ である。f が I で積分可能であることを言うには、上積分 $S=0$ であること、即ち、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\leq\varepsilon$ なる分割 Δ が存在することを言わなくてはならない。

与えられた任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\leq\varepsilon$ なる分割 $\Delta=\Delta_\varepsilon$ を実際に与えることによって、このことを示せ。

6-55B.　$I=[0,3]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=1\text{ のとき})\\ 2 & (x=2\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

を考える。上問と同様に、与えられた任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\leq\varepsilon$ なる分割 $\Delta=\Delta_\varepsilon$ を具体的に与えることによって、f が I で積分可能であることを示せ。

6-56C.　m を 1 以上の整数とする。$I=[0,1]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & \left(x=\dfrac{k}{m}\ (k=1,2,\ldots,m-1)\text{ のとき}\right)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

について、上問と同様にして、f が I で積分可能であることを示せ。

6-57D.　閉区間 $I=[0,1]$ の部分集合 $T\subset I$ に対し、次で定義された I 上の関数 φ_T を T の特性関数 (charasteristic function) と呼ぶ：

$$\varphi_T(x)=\begin{cases}1 & (x\in T\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外}).\end{cases}$$

以下の T について、その特性関数 φ_T は I で積分可能であるか？

(1) $T=\left[0,\dfrac{1}{2}\right)=\left\{x\in\boldsymbol{R}\,\middle|\,0\leq x<\dfrac{1}{2}\right\}$

(2) $T=I\cap\boldsymbol{Q}$ （$\boldsymbol{Q}$ は有理数全体の集合）

(3) $T=\left\{\dfrac{1}{n}\,\middle|\,n\text{：正整数}\right\}$

(4) $T=\{x\in I|x\text{ の三進小数展開に 1 が現れない }\}$

6-58A. $a < c < b$ とし、閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 f について、f は $[a,b]$ で有界であるとする。従って、$[a,c],[c,b]$ でも有界であり、それぞれの区間における下積分が存在する。区間を明示して、$[a,b]$ (resp. $[a,c],[c,b]$) における f の下積分を $s(a,b)$ (resp. $s(a,c), s(c,b)$) と書くことにする。$s(a,b) = s(a,c) + s(c,b)$ であることを示したい。それには、$s(a,b)$ の定義により、$s(a,c)+s(c,b)$ が $X := \{s_\Delta | \Delta：[a,b]$ の分割 $\}$ の上限（最小上界）であることを示せば良い。

(1) $s(a,c) + s(c,b)$ が X の上界であること、即ち、$[a,b]$ の任意の分割 Δ に対し、$s(a,c)+s(c,b) \geq s_\Delta$ であることを示せ。（ヒント：必要なら c を分点に加えた分割 $\widetilde{\Delta}$ を考え、それが定める $[a,c],[c,b]$ の分割をそれぞれ Δ_1, Δ_2 とする。$s_{\Delta_1} + s_{\Delta_2} = s_{\widetilde{\Delta}} \geq s_\Delta$ であることと、$s(a,c), s(c,b)$ の上界性を用いよ。）

(2) $s(a,c) + s(c,b)$ が X の上界のうち最小であること、即ち、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$s(a,c) + s(c,b) - \varepsilon$ が X の上界でないことを示せ。（ヒント：$[a,b]$ の分割 Δ で $s_\Delta > s(a,c) + s(c,b) - \varepsilon$ となるものの存在を示す。$s(a,c), s(c,b)$ の上界としての最小性を用いよ。）

6-59B. 上問の状況で、同様にして、上積分についての等式 $S(a,b) = S(a,c) + S(c,b)$ であることを示せ。即ち、$Y := \{S_\Delta | \Delta：[a,b]$ の分割 $\}$ とするとき、

(1) $S(a,c) + S(c,b)$ が Y の下界であることを示せ。

(2) $S(a,c) + S(c,b)$ が Y の下界のうち最大であることを示せ。

6-60C. 上 2 問を用いて、f が $[a,c],[c,b]$ で共に積分可能であることと、f が $[a,b]$ で積分可能であることとが同値であることを示せ。

6-61C. 有界閉区間 $I = [a,b]$ で定義された有界な関数 f, g が、$\forall x \in I : f(x) \leq g(x)$ を満たすとする。

(1) $\inf_{x\in I} f(x) \leq \inf_{x \in I} g(x)$ であることを示せ。（ヒント：$\inf_{x\in I} f(x)$ が $g(x)$ の下界であることを示せば、下界の中での $\inf_{x\in I} g(x)$ の最大性から従う。）

(2) 区間 I の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ に対し、f, g に対して上問のように定めた s_Δ を、関数を明記してそれぞれ $s_\Delta(f), s_\Delta(g)$ と書くことにする。このとき、$s_\Delta(f) \leq s_\Delta(g)$ であることを示せ。（ヒント：各小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ について、前小問を適用せよ。）

(3) 各関数の下積分 $s(f), s(g)$ について、$s(f) \leq s(g)$ であることを示せ。（ヒント：$s(g)$ が $s_\Delta(f)$ の上界であることを示せば、上界の中での $s(f)$ の最小性から従う。）

(4) f, g が共に I で積分可能であれば、$\displaystyle\int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx$ であることを示せ。（ヒント：上積分についても同様に考えて、併せよ。）

以下の問題では、微分積分学の基本定理を用いて、「不定積分 = 原始関数」「定積分 = 原始関数の区間両端での値の差」として（即ち、今までに馴染みの計算法に従って）考えて良い。

6-62A. 非負整数 m, n に対し、$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ を求めよ。

6-63B. 非負整数 m, n に対し、$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx, \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx$ を求めよ。

6-64A. 次の極限は？

(1) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{\sqrt{x}} dx$　　(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

6-65B. 次の極限は？

(1) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx$　　(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2} dx$

6-66B. 次の極限は？

(1) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \int_0^M e^{-x} dx$　　(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \log x dx$

（(2) のヒント：$\lim_{x\to+0} x \log x = 0$ を用いよ。）