7. 広義積分の収束と発散・色々な積分の計算 (07/18)

7-67A.　次の広義積分の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$　(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{2019}}{e^x}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$

7-68B.　次の広義積分の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}+1}dx$　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+2019}{x\sqrt{x}}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2019}{x\sqrt{x}}dx$

（結果のみでも良いが、その場合は、次の例のような広義積分のうち、どのような広義積分と収束・発散を共にするとして判定したかを明記せよ。

例：$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx,\quad \int \frac{1}{x}dx,\quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx,\quad \int \frac{1}{x^2}dx,\quad \int \frac{1}{x^3}dx,\quad \int \frac{1}{e^x}dx$　など）

7-69B.　次の広義積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

7-70C.

$$I_k(M) := \int_0^M x^ke^{-x}dx$$

とおく。$I_k(M)$ の k に関する漸化式を求め、極限 $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} I_k(M)$ が収束することを、k に関する帰納法で示せ。また、極限値 $\displaystyle I_k := \lim_{M\to+\infty} I_k(M)$ に関する漸化式を求めよ。

7-71C.　広義積分 $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\log x}dx$ の収束・発散を判定せよ。

7-72C.　$a>1$ に対し、広義積分 $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}dx$ の収束・発散を判定せよ。

7-73C.　被積分関数を $\displaystyle\frac{1}{x\log x(\log\log x)^a}$ として、上 2 問の議論の続きを考察せよ。

7-74B.　$[-\pi,\pi]$ で定義された次の関数 f について、各自然数 n に対し、定積分

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

の値を求めよ。

(1) $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \le x < 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (0 \le x \le \pi \text{ のとき}) \end{cases}$　(2) $f(x)=x$　(3) $f(x)=|x|$

7-75B.　有理関数

$$f(x) = \frac{7x^2+6x-5}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}$$

の不定積分を計算したい。

(1) $\displaystyle f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+5}$ を満たす定数 a,b,c,d を求めよ。

(2) それぞれの項の不定積分を計算して、$\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。

7-76C.　$\displaystyle I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ が満たす漸化式を求めよう。（以下、I_n は不定積分なので、定数の差は気にしなくてよい。）

(1) $1+x^2=t$ と置換することにより、$\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^n}dx$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = x\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}$ と見て部分積分することにより、$I_n - I_{n+1}$ を I_n で表し、I_n, I_{n+1} の関係式を求めよ。

7-77B. 次の不定積分を、有理関数の積分に帰着せよ。

(1) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-4x}{x}}\,dx$ （ヒント：$t=\sqrt{\dfrac{1-4x}{x}}$ とおく。）

(2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-4x^2}}{2+x}dx$ （ヒント：$y=\sqrt{x-4x^2}$ とおくと、$y^2=x-4x^2$ となり、これは楕円 C の方程式である。C 上に分かり易い点 P（例えば $(0,0)$）を取り、P を通り傾き t の直線 ℓ を考える。C と ℓ との交点のうちで P と異なる点を $Q(x,y)$ とすると、Q の座標 x,y はともに t の有理式で書ける。この変数変換を用いると、有理関数の積分に変換できる。尚、楕円の方程式を三角関数を用いて媒介変数表示することにより三角関数の有理式の積分に変換することや、$\sqrt{x-4x^2}=x\sqrt{\dfrac{1-4x}{x}}$ と見て (1) と同様な変数変換を狙うこともできる。いろいろ試みよ。）

(3) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$ （ヒント：$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおく。）

7-78B. 次の不定積分を求めよ。（変数変換する前の変数 x で表すのが本来だが、面倒なら変数変換した後の変数で表した状態でも良い。）

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[5]{x+1}}\,dx$ （ヒント：$t=\sqrt[5]{x+1}$ とおく。）

(2) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ （ヒント：$x=\tan t$ または $x=\sinh t$ とおくのが素直と思われるが、$t=x+\sqrt{1+x^2}$ とおく手法もある。）

(3) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ （ヒント：素直に $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ とおくなど、有理関数の積分に帰着する変数変換はいろいろ考えられるが、ここでは $x=\sin\theta$ とおくのが簡明か。）

7-79C. $y=\arctan x=\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$ について、定積分 $I(a)=\displaystyle\int_0^a \arctan x dx$ $(a>0)$ を次の 2 通りで求めてみよう。

(1) $\arctan x=(x)'\arctan x$ と見て部分積分して求めよ。

(2) 長方形領域 $D=\{(x,y)|0\le x\le a, 0\le y\le \arctan a\}$ は $y=\arctan x$ のグラフによって 2 つの領域に分かれる。この各領域の面積を考えることによって求めよ。