

1. 不等式・ ε - δ 論法

1-1. 不等式の基本性質.

- $x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$: 推移律 (transitive law)
- $x \leq y, y \leq x \implies x = y$: 反対称律 (anti-symmetric law)
- 演算との関係 :
 - ★ $x \leq y \implies x + a \leq y + a$
 - ★ $a > 0, x \leq y \implies ax \leq ay$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$: 三角不等式 (triangle inequality)

1-2. ε - δ 式の極限の定式化.

- 関数 f に対し、 $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow b$
 ($f(x)$ が b に収束 (converge) する, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$)
 $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbf{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$
- 関数 f が $x = a$ で連続 (continuous) $\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
 $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbf{R} : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

1-3. 練習問題.

- (1) 「関数 f が $x = a$ で連続でない」ということを、論理記号を交えた数式で記述せよ。
- (2) 関数 f が $x \rightarrow a$ で或る値に収束するとき、その極限は一意的であることを示せ。(即ち、「 $x \rightarrow a$ で $f(x) \rightarrow b$ かつ $f(x) \rightarrow b'$ 」ならば $b = b'$ である。このことから、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ という表記が意味を持つ。)
- (3) 関数 $f(x) = x^2$ が、任意の実数 a に対して $x = a$ で連続であることを証明したい。
 - (a) 関数 f が $x = a$ で連続であることを示すには何を示せば良いか。論理記号を交えた数式で記述せよ。
 - (b) そのことを証明せよ。証明の形式は次に順うと良い。

$\forall \varepsilon > 0$ を取る。
 $\delta = \boxed{\quad ? \quad}$ と取ると、
 $0 < |h| < \delta$ に対し、

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon \text{ を示す}$$

従って、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となり、 f は $x = a$ で連続。

- (4) 関数 $f(x) = x^3$ について、任意の実数 a に対し、 f が $x = a$ で連続であることを、
 - (a) (ε - δ 流に) 論理記号を交えた数式で記述せよ。
 - (b) 証明せよ。
- (5) $x \neq 0$ に対して $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ で定義される関数 f について、 $x \rightarrow 0$ のとき $f(x) \rightarrow 0$ (即ち $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$) であることを証明せよ。
- (6) $a, c \in \mathbf{R}, c > 0$ とする。関数 f が $x = a$ で連続であるとき、 $g(x) := cf(x)$ で定義される関数 g もまた $x = a$ で連続であることを証明したい。
 - (a) 関数 g が $x = a$ で連続であることを示すには何を示せば良いか。論理記号を交えた数式で記述せよ。
 - (b) そのことを証明せよ。($c > 0$ の仮定はもちろん不要であるので、出来ればこの仮定がなくても通用する形で証明を書いてみよ。)
- (7) 関数 f が $x = a$ で連続であり、 $f(a) > 0$ であるとき、或る $\delta > 0$ に対し、 $|x - a| < \delta$ ならば $f(x) > 0$ となることを証明せよ。(「 a の充分近くでは $f(x) > 0$ 」のようにも言う。)