4. 冪級数・Taylor 展開

4–1. **冪級数の収束性・収束半径.** 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ において、

- $x = x_0$ で各項有界（即ち、$\exists C > 0 : \forall n : |c_n x_0^n| < C$）$\Longrightarrow |x| < |x_0|$ で絶対収束
- $r := \sup\left\{|x| \middle| \sum c_n x^n：収束\right\}$：**収束半径**

  （$\forall x$ で収束する時は便宜上 $r = \infty$ という。$x = 0$ のみで収束する時は $r = 0$。）

  ⋆ 収束半径 r の時、$|x| = r$ を**収束円**といい、$|x| < r$ の範囲を**収束円内**という。

  ⋆ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の収束半径が $r \Longleftrightarrow |x| < r$ で絶対収束、$|x| > r$ で発散

  （$r = \infty$ の時は $\forall x$ で絶対収束）

  $|x| = r$ の時は判らない（いろいろな場合がある)。
- Cauchy の判定法（n 乗根テスト）：$\sqrt[n]{|c_n|} \to s (n \to \infty) \Longrightarrow$ 収束半径は s^{-1}
- d'Alembert の判定法（比テスト）：$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to s (n \to \infty) \Longrightarrow$ 収束半径は s^{-1}
- 上極限を用いた収束半径の公式：

  $s := \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} \sqrt[k]{|c_k|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ とすると、収束半径は s^{-1}

4–2. **Taylor 展開.**

- 何回でも微分できる関数 $f(x)$ の（$x = 0$ を中心とする）**（形式的）Taylor 展開**

$$(\spadesuit) \qquad f(x) \text{ “ = ” } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots .$$

- **剰余項**：$R_N(x) := f(x) - \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right)$
- 剰余項の評価（**Taylor の定理**）：f が N 階微分可能の時、

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$

- 証明に使う定理：

  ⋆ Rolle の定理：

  f: 閉区間 $[a, b]$ で連続、開区間 (a, b) で微分可能、$f(a) = f(b)$

  $\Longrightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

  ⋆ Cauchy の平均値の定理：

  f, g: 共に 閉区間 $[a, b]$ で連続、開区間 (a, b) で微分可能で

  ∗ $\nexists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) = 0$

  ∗ $(f(a), g(a)) \neq (f(b), g(b))$

  $\Longrightarrow \exists c \in (a, b) : [f(a) - f(b) : g(a) - g(b)] = [f'(c) : g'(c)]$ （比が等しい）
- $N \longrightarrow \infty$ で $R_N(x) \longrightarrow 0$ の時、($\spadesuit$) の右辺は収束して本当に $= f(x)$
- 例えば $\exists C > 0 : \forall N, 0 < \forall\theta < 1 : |f^{(N)}(\theta x)| < C^N$ ならばよい。
- f が（$x = 0$ の近くで）N 回微分可能ならば、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(0)}{N!}x^N + o(x^N) \quad (x \to 0)$$

- 形式的 Taylor 展開が元の関数に一致しない例：

  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$

4–3. **項別微積分.** 冪級数で表される関数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x|<r)$ について

- $\int_{t=0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ $(|x|<r)$
- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $(|x|<r)$

特に $f(x)$ は収束円内 $|x|<r$ で何回でも微分可能。

4–4. **二項展開.** $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し、

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

- $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}$：**二項係数**
- $\alpha = N \in \boldsymbol{N}$ の時は実質有限和で、普通の二項定理：$(1+x)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n$
- $\alpha \notin \boldsymbol{N}$ の時は本当に無限和で、収束半径 1

4–5. **練習問題.**

(1) 次の関数の Taylor 展開を、例えば x^4 の項まで (出来ればもっと) 求めよ。
  (a) $e^{-x^2} = \exp(-x^2)$　　(e^x の Taylor 展開に $-x^2$ を代入せよ)
  (b) $(1+x)e^x$　　($1+x$ と $\cos x$ の展開とを掛け算せよ)
  (c) $e^x \cos x$　　(e^x の展開と $\cos x$ の展開とを掛け算せよ)
  (d) $\frac{1}{1-x-x^2}$　　(筆算の割り算の要領で計算せよ。係数の列に見覚えは？)
  (e) $\frac{1}{\cos x}$　　(分母が冪級数でも同様に割り算の計算が出来る)
  (f) $-\log(1-x)$　　($\frac{1}{1-x}$ の展開の両辺を積分せよ)
  以下は、いろいろな方法を試みよ。
  (g) $e^{x-x^2} = \exp(x-x^2)$
  (h) $\sin^2 x$
  (i) $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$
  (j) $\frac{1}{(1-x)^N}$ $(N \in \boldsymbol{N})$

(2) 次の冪級数の収束半径を求めよ。
  (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} x^n$　(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$　(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$　(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

(3) $f(x) = e^x, \cos x, \sin x$ の形式的 Taylor 展開について、
  (a) 任意の実数 x について収束すること（収束半径が ∞）を示せ。
  (b) 剰余項 $R_N(f;x)$ の具体形を記せ。
  (c) 任意の実数 x について、$R_N(f;x) \longrightarrow 0$ $(N \longrightarrow \infty)$、従って、形式的 Taylor 展開が収束して元の関数に一致することを示せ。

(4) $f(x) = e^x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f;x)$ について、
  (a) $|R_N(f;1)| < 10^{-6}$ となる（出来ればなるべく小さい）N を与えよ。($2<e<3$ であることくらいは用いてよい。)
  (b) e の近似値を小数第 5 位まで求めよ。
  (c) 誤差が 10^{-5} 以下であることを保証せよ。但し、各項の四捨五入による誤差（丸め誤差）・剰余項を無視したことによる誤差（打切誤差）の双方を考慮に入れよ。