5. 指数関数とその仲間たち

5–1. **逆三角関数.** 三角関数を単調な区間に制限して逆関数を考えたものを**逆三角関数**という：

- $y = \sin x$ $(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$ の逆関数 $y = \arcsin x$ $(-1 \le x \le 1, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2})$ ：**主値**
  （しばしば $\mathrm{Arcsin}\ x, \sin^{-1} x$ 等とも書かれる）
- $y = \tan x$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ の逆関数 $y = \arctan x$ $(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ ：**主値**
  （しばしば $\mathrm{Arctan}\ x, \tan^{-1} x$ 等とも書かれる）
- 積分表示：$\arcsin x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$,　$\arctan x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,　$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- Taylor 展開：
  - ⋆ $\arcsin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$
  - ⋆ $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$

5–2. **Euler の公式.**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

- $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$,　$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$,　$\tan x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$
- de Moivre の公式：$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$
- 複素数の極形式：$\alpha = a + bi = re^{i\theta}$
  - ⋆ $r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$：$\alpha$ の**絶対値 (absolute value)**
  - ⋆ $\theta = \arg \alpha$：α の**偏角 (argument)**、$r \cos \theta = a, r \sin \theta = b$

5–3. **双曲線関数.** 次で定義される関数を、総称して**双曲線関数**という：

- $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ：**双曲余弦 (hyperbolic cosine)**
- $\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ：**双曲正弦 (hyperbolic sine)**
- $\tanh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ：**双曲正接 (hyperbolic tangent)**

三角関数と類似の公式が多く成立

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,　$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
- $(\cosh x)' = \sinh x$,　$(\sinh x)' = \cosh x$
- 加法定理：
  - ⋆ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
  - ⋆ $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
  - ⋆ $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
- Taylor 展開：
  - ⋆ $\cosh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots$
  - ⋆ $\sinh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$

5–4. **練習問題.**

(1) 次の値を主値で答えよ。但し、主値の範囲は、それぞれ $-\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq \arccos x \leq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$ に取ることとする。

(a) $\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\arccos \left(-\dfrac{1}{2}\right)$ (c) $\arctan \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) a を $|a| < 1$ なる実数とするとき、$x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq a$ で定まる領域の面積を求めよ。

(3) $\tanh x$ の Taylor 展開を、x^7 の項まで（意欲があればもっと）求めよ。

(4) 次の手順で $y = \arcsin x$ の Taylor 展開を求めよ。

(a) $x = \sin y$ の満たす微分方程式を求める。

(b) $\arcsin x$ を積分で表す。

(c) 被積分関数を Taylor 展開して項別積分する。

(5) 上と同様にして、$\arctan x, \operatorname{arcsinh} x, \operatorname{arctanh} x$ などの Taylor 展開を求めてみよ。

(6) $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$ を求めよ。（ヒント：$\arcsin x = (x)' \arcsin x$ と見て部分積分。上問の中で $\arcsin x$ の微分が分かっていることに注意。）

(7) 同様に、$\arctan x, \operatorname{arcsinh} x, \operatorname{arctanh} x$ などの不定積分を求めてみよ。

(8) 双曲線 $C : x^2 - y^2 = 1$ 上の点 P の座標は $(\cosh t, \sinh t)$ と書ける。C 上の第 1 象限の点 $P(\cosh t, \sinh t)$ に対し、C 上の点 $A(1, 0)$ から P に至る C 上の弧を γ とするとき、線分 OA、線分 OP、γ で囲まれた領域の面積 S を求めよ。（この結果を円 $x^2 + y^2 = 1$ の場合と比べよ。）

(9) $C : y = \cosh x$ 上の点 $A(0, 1)$ から $P(t, \cosh t)$ までの C の弧長を求めよ。

5–5. **複素指数関数および複素数の極形式に関する練習問題.** 複素数の極形式や複素数を定義域とする関数については、基本的には本授業の範囲外であるが、補足的にいくつか挙げておく。詳しくは 2 年次の「複素関数論」の授業などで扱う。複素数を用いて指数関数・三角関数を統一的に扱うことは、電磁気学や波の記述に関して便利（必須）であり、引き続く「フーリエ・ラプラス解析」と併せて履修されたい。

(1) e^x の Taylor 展開において、形式的に x を ix （i は虚数単位、$i^2 = -1$）と置き換えた級数を考え、これを e^{ix} と書くことにする。

(a) 形式的に計算して実部・虚部に分けると、$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ の形になることを確かめよ。（複素数まで拡げて収束・極限等の定式化を整備することにより、この関係式は正当化される。）

(b) 次の関係式が成り立つ：

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

(c) 上の関係式と指数法則とから、三角関数の加法定理を導け。

(2) 極形式で表示された次の複素数を実部・虚部で表示せよ。

(a) $e^{\frac{\pi i}{6}} = \exp\left(\dfrac{\pi i}{6}\right)$ (b) $2e^{-\frac{\pi i}{4}} = 2\exp\left(-\dfrac{\pi i}{4}\right)$ (c) $e^{\frac{2\pi i}{5}} = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{5}\right)$

(3) 実部・虚部で表示された次の複素数を極形式で表示せよ。

(a) i (b) $2 + 2i$ (c) $\sqrt{3} + i$

(4) $(1 + \sqrt{3}i)^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ。（ヒント：直接計算でも良いが、極形式表示も有効。）

(5) $\sqrt{i}$ （即ち、$x^2 = i$ の解）を求めよ。