# 6. 一変数関数の積分

6–1. **定積分の定義.** 関数 $y=f(x)$ が有界閉区間 $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$ で有界とする。

- $\Delta : a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$：区間 $[a,b]$ の**分割**
  $I_i:=[x_{i-1},x_i]$：各小区間 $(i=1,\ldots,n)$、$|I_i|:=x_i-x_{i-1}$：小区間 $I_i$ の区間幅
  小区間の最大幅 $\max\limits_{1\le i\le n}|I_i|$ を $|\Delta|,\delta(\Delta)$ 等と書く。
- $m_i:=\inf\limits_{x\in I_i}f(x),\ M_i:=\sup\limits_{x\in I_i}f(x)$：各小区間 $I_i$ での関数値 $f(x)$ の下限・上限
- $s_\Delta:=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i|I_i|,\quad S_\Delta:=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i|I_i|$
- $s:=\sup\limits_{\Delta}s_\Delta,\ S:=\inf\limits_{\Delta}S_\Delta$：$f$ の $[a,b]$ での**下積分・上積分**
- $f$ が $[a,b]$ で**積分可能** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} s=S$
  この時、$s=S=:\displaystyle\int_a^b f(x)dx$：$f$ の $[a,b]$ での**定積分**
- (**Darboux の定理**) $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$：分割の列で、$|\Delta_n|\to 0$ とする。この時、
  $s_{\Delta_n}\to s, S_{\Delta_n}\to S\ (n\to\infty)$。
- 定積分の値の見当がついているときには、次を利用することも出来る：
  $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=I \iff \forall\varepsilon>0:\exists\Delta=\Delta_\varepsilon$：$[a,b]$ の分割 : $I-\varepsilon\le s_\Delta, S_\Delta\le I+\varepsilon$
- 次の Riemann 和を用いて定式化することもある：
  - ⋆ $\Xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$：各小区間から代表点を 1 つづつ選んだもの $(\xi_i\in I_i)$
    $I(\Delta,\Xi):=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ ：**Riemann 和**
  - ⋆ $f$ が $[a,b]$ で積分可能 $\Longleftrightarrow \exists\lim\limits_{|\Delta|\to 0}I(\Delta,\Xi)$。この時、$\lim\limits_{|\Delta|\to 0}I(\Delta,\Xi)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

6–2. **積分の基本性質.**

- 区間に関する加法性：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$
- 線型性：$\displaystyle\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx,\ \int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
- 単調性：$[a,b]$ で $f(x)\le g(x)\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

6–3. **不定積分.** 定積分関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ に於いて、下端の違いによる定数の差を気にしない時、単に $\displaystyle\int f(x)dx$ と書く。$\cdots$ **不定積分**

6–4. **微分積分学の基本定理.** $f$ が連続ならば、有界閉区間に於いて積分可能で、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

即ち、**不定積分** $=$ **原始関数**（微分すると $f$ になる関数）。$\cdots$ 微分法と積分法との邂逅 !!
又、$F$ を $f$ の原始関数（の一つ）とすると、

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)\left(=\Big[F(x)\Big]_a^b \text{ と書く}\right)$$

— 抽象的存在は反復によって具体的存在と化する。
足立恒雄「類体論へ至る道」より

6–5. **練習問題.**

(1) 閉区間 $I = [0, 2]$ で定義された次の関数 $f$ が積分可能であることを、定義に基づいて示せ：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

(2) 有界閉区間 $I = [a, b]$ で定義された有界な関数 $f, g$ が、$\forall x \in I : f(x) \leq g(x)$ を満たすとする。

(a) $\inf_{x \in I} f(x) \leq \inf_{x \in I} g(x)$ であることを示せ。（ヒント：$\inf_{x \in I} f(x)$ が $g(x)$ の下界であることを示せば、下界の中での $\inf_{x \in I} g(x)$ の最大性から従う。）

(b) 区間 $I$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ に対し、$f, g$ に対する $s_\Delta$ を、関数を明記してそれぞれ $s_\Delta(f), s_\Delta(g)$ と書くことにする。このとき、$s_\Delta(f) \leq s_\Delta(g)$ であることを示せ。（ヒント：各小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ について、前小問を適用せよ。）

(c) 各関数の下積分 $s(f), s(g)$ について、$s(f) \leq s(g)$ であることを示せ。（ヒント：$s(g)$ が $s_\Delta(f)$ の上界であることを示せば、上界の中での $s(f)$ の最小性から従う。）

(d) $f, g$ が共に $I$ で積分可能であれば、$\displaystyle\int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx$ であることを示せ。（ヒント：上積分についても同様に考えて、併せよ。）

(3) 有界閉区間 $I$ で定義された関数 $f, g$ に対し、その和 $f+g$ を $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ で定義する。以下、$f, g$ は $I$ で有界であるとする。

(a) $\inf_{x \in I}(f+g)(x) \geq \inf_{x \in I} f(x) + \inf_{x \in I} g(x)$ であることを示せ。（ヒント：$\inf_{x \in I} f(x) + \inf_{x \in I} g(x)$ が $(f+g)(x)$ の下界であることを示せば、下界の中での $\inf_{x \in I}(f+g)(x)$ の最大性から従う。）

(b) 区間 $I$ の分割 $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ に対し、$f, g, f+g$ に対する $s_\Delta$ を、関数を明記してそれぞれ $s_\Delta(f), s_\Delta(g), s_\Delta(f+g)$ と書くことにする。このとき、$s_\Delta(f+g) \geq s_\Delta(f) + s_\Delta(g)$ であることを示せ。（ヒント：各小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ について、前小問を適用せよ。）

(c) $\sup_\Delta (s_\Delta(f) + s_\Delta(g)) = s(f) + s(g)$ であることを示せ。（ヒント：形式的に進めても $\leq$ しか出ない。$\geq$ を示すには、$s(f) + s(g)$ が $s_\Delta(f) + s_\Delta(g)$ の最小の上界であること、即ち、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、或る分割 $\Delta$ が存在して、$s_\Delta(f) + s_\Delta(g) \geq s(f) + s(g) - \varepsilon$ となることを示す必要がある。$s_\Delta(f), s_\Delta(g)$ の上界の中での $s(f), s(g)$ の最小性から、$s(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}, s(g) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ に対してしかるべき分割 $\Delta_1, \Delta_2$ を取り、それらの分点を併せた分割（共通細分）を考えよ。）

(d) 各関数の下積分 $s(f), s(g), s(f+g)$ について、$s(f+g) \geq s(f) + s(g)$ であることを示せ。（ヒント：$s(f+g)$ が $s_\Delta(f) + s_\Delta(g)$ の上界であることを示せば、上界の中での $\sup_\Delta (s_\Delta(f) + s_\Delta(g))$ の最小性と、前小問とを併せて従う。）

(e) 各関数の上積分 $S(f), S(g), S(f+g)$ について、$S(f+g) \leq S(f) + S(g)$ であることを示せ。（ヒント：下積分と同様に考えよ。）

(f) $f, g$ が共に $I$ で積分可能であれば、$f+g$ も $I$ で積分可能であり、

$$\int_I (f+g)(x)dx = \int_I f(x)dx + \int_I g(x)dx$$

が成り立つことを示せ。

(4) 有界閉区間 $I$ で定義された関数 $f$ と $c \in \boldsymbol{R}$ に対し、スカラー倍 $cf$ を $(cf)(x) := cf(x)$ で定める。$f$ は $I$ で有界であるとする。$f$ が積分可能ならば、$cf$ も積分可能で、

$$\int_I (cf)(x)dx = c\int_I f(x)dx$$

であることを示せ。