7. 広義積分（変格積分）

7–1. **広義積分（変格積分）**. 積分区間又は非積分関数が有界でない場合。
下記のそれぞれについて、右辺の積分および極限が存在する場合、左辺の積分が収束するという。

- f：区間 $[a,b)$（resp. $(a,b]$） の上端 b（resp. 下端 a）の近くで有界でない場合
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
- f：区間 $[a,+\infty)$（resp. $(-\infty,b]$）で定義されている場合
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^b f(x)dx$$
- f：区間 $[a,b]$ の内点 c の近くで有界でない場合
$\longrightarrow$ 積分区間を $[a,c),(c,b]$ に分けて、それぞれ考えよ。
- f:積分区間の両端 a,b で広義積分の場合（a,b の近くで有界でないか、$a,b=\pm\infty$）
$\longrightarrow$ 適当な点 c で積分区間を $(a,c],[c,b)$ に分けて、それぞれ考えよ。
- 典型的な例：
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases}\alpha>1 \Rightarrow \text{収束}\\ \alpha\le 1 \Rightarrow \text{発散},\end{cases} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases}\alpha<1 \Rightarrow \text{収束}\\ \alpha\ge 1 \Rightarrow \text{発散}\end{cases}$$
- 比較判定法 (簡単な場合)：
  - $\star$ $\exists\varepsilon>0 : f(x) = O\left(\dfrac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)(x\to+\infty) \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ ：収束
  - $\star$ $\exists\varepsilon>0 : f(x) = O\left(\dfrac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right)(x\to+0) \Rightarrow \displaystyle\int_0^{1} f(x)dx$ ：収束

7–2. Γ **関数・**B **関数.**

- $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^s\frac{dx}{x}$ ：Γ **関数** (広義積分は $s>0$ で収束)
- $\mathrm{B}(s,t) = \displaystyle\int_0^1 x^s(1-x)^t\frac{dx}{x(1-x)}$ ：B **関数** (広義積分は $s>0,t>0$ で収束)
- $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad \Gamma(n+1)=n!,\quad \Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s},\quad \mathrm{B}(s,t)=\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

7–3. **練習問題.**

(1) $0<\alpha<1<\beta$ かつ $\alpha\beta=1$ とする。広義積分
$$I=\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx, \qquad J=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\beta}dx$$
をそれぞれ求めた上で比較し、それをグラフの下の面積という観点から解釈せよ。

(2) a,b を正の実数として、広義積分
$$I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx dx, \qquad J=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx$$
を、色々な方法で求めてみよう。

(a) 部分積分して I,J の間の関係式を 2 つ求め、それらを連立して I,J を求めよ。（2 回部分積分してそれぞれが満たす関係式を得る方法と、実質的には同じ。）

(b) 形式的に $K=I+iJ$ とおくと、Euler の公式により、
$$K=\int_0^{+\infty}e^{(-a+bi)x}dx$$
となる。複素数 $\alpha=-a+bi\in\boldsymbol{C}$ に対しても、$(e^{\alpha x})'=\alpha e^{\alpha x}$ となると考えて、広義積分 K の値を求め、その実部・虚部として I,J を得よ。（この考えは、複素数の指数関数や複素数値関数の微分積分をしかるべく定式化することにより正当化される。詳しくは複素関数論で。）

(3) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{1-\cos x}$ について、積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ を考える。

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ は、有限な値 c を持つ。（ヒント：Taylor 展開を用いよ。）

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ である。（従って、I は $x=0$ の所で広義積分。）

(c) さて、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=c$ とは、$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:0<|x|<\delta\Rightarrow c-\varepsilon<\dfrac{x^2}{1-\cos x}<c+\varepsilon$ ということである。このことから、$f(x)=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $(x\to+0)$ である。

(d) 従って、比較判定法により広義積分 I は収束する。

（実際に暗算で判断する場合には、$x=0$ の近くで $1-\cos x$ は大体 x^2 の定数倍くらいなので、$f(x)$ は $x^{-\frac{1}{2}}$ の定数倍くらい、というようなことで良い。）

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x\,dx$ の収束・発散を考える。（$x=\dfrac{\pi}{2}$ の所で広義積分である。）

(a) $\tan x$ の不定積分（原始関数）が具体的に求まるので、それを用いて広義積分の収束・発散を判定せよ。

(b) $t=\dfrac{\pi}{2}-x$ と変換すれば $t=0$ での広義積分になる。$\tan x=\tan(\dfrac{\pi}{2}-t)$ の $t\longrightarrow+0$ での発散の様子を見ることにより、広義積分の収束・発散を判定せよ。

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ および $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ を求めよ。（注：特に後者の積分は、複素関数論の留数定理を用いても簡明に計算できる。乞うご期待。）

(6) Γ 関数・B 関数に関する諸性質の導出に際しては、多変数関数の微分積分に関する性質を利用するものも多く、「数学 BI（微分積分）」で扱う範囲を超えるが、関係式 $\Gamma(s)\Gamma(t)=\mathrm{B}(s,t)\Gamma(s+t)$ は重要なので、「数学 BII（多変数微積）」で扱う事項も或る程度踏まえて触れておく。

(a) $\Gamma(s)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-y^2}y^{2s-1}dy$ （ヒント：$x=y^2$ とおく。）

(b) $\mathrm{B}(s,t)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2s-1}\theta\cos^{2t-1}\theta\,d\theta$ （ヒント：$x=\sin^2\theta$ とおく。ここまでは「数学 BI（微分積分）」の範囲内）

(c) $\Gamma(s)\Gamma(t)=\left(2\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}x^{2s-1}dy\right)\left(2\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-y^2}y^{2t-1}dy\right)$ と見て、極座標変換 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ により、$\Gamma(s)\Gamma(t)=\mathrm{B}(s,t)\Gamma(s+t)$ を導け。

(d) これより、$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。また $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを示せ。

（e^{-x^2} の不定積分は初等関数では書き表せないが、$[0,+\infty)$ における定積分（広義積分）の値については、このように判る。統計でデータやその誤差の分布を扱うときに現れる積分で、詳しくは多分「数学 CI（統計データ解析）」「数学 CII（確率統計）」その他データの通信などを扱う講義で触れられるであろう。乞うご期待。）