8. 積分の計算法

8–1. 有理関数の積分. 部分分数に分解し、次の場合に帰着。(但し $c>0$)

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}dx$ ：$n=1$ なら $\log|x-a|$, $n\geq 2$ なら $\displaystyle -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{((x+b)^2+c)^n}dx$ ：変数変換 $\sqrt{c}\,t=x+b, \sqrt{c}\,dt=dx$ で $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ に帰着
  $\longrightarrow$ $n=1$ なら $\arctan t$, $n\geq 2$ なら部分積分で $n-1$ の場合に帰着
- $\displaystyle\int \frac{2(x+b)}{((x+b)^2+c)^n}dx$ ：変数変換 $t=(x+b)^2+c, dt=2(x+b)dx$ で $\displaystyle\int \frac{dt}{t^n}$ に帰着

8–2. 冪根（平方根など）を含む積分. 不定積分（原始関数）が求まる幾つかの例を挙げる。

- $\sqrt[n]{ax+b}$ の有理式の積分
  $\longrightarrow$ 変数変換 $y^n=ax+b, ny^{n-1}dy=adx$ で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+b}$（$\sqrt{1\text{ 次式}}$ 2 種類）の有理式の積分
  $\longrightarrow$ 変数変換 $y^2=ax+b, 2ydy=adx$ で $\sqrt{2\text{ 次式}}$ の有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の積分
  $\longrightarrow$ $y^2=ax^2+bx+c$ 上の点を用いた有理媒介変数表示で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{3\text{ 次以上の多項式}}$ の積分は、一般には初等関数の範囲に収まらない。
  （$\sqrt{3\text{ 次式又は }4\text{ 次式}}$ の場合は楕円関数と呼ばれる関数になる。）

8–3. 三角関数の有理関数の積分. $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くと、有理関数の積分に変数変換できる。

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

8–4. 練習問題.

(1) 次の有理式を部分分数分解せよ。

(a) $\dfrac{1}{x(x-1)}$ (b) $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$ (c) $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$

(2) 有理関数 $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4x-30}{x^2(x^2-2x+10)}$ の不定積分を計算したい。

(a) $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c(2x-2)+d}{x^2-2x+10}$ を満たす定数 a,b,c,d を求めよ。

(b) それぞれの項の不定積分を計算して、$\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。

(3) 不定積分

$$I_n=\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}\qquad (n=1,2,\dots)$$

を考える。

(a) $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}=(x)'\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ と見て部分積分することにより、I_n と I_{n+1} との間の関係式を求めよ。

(b) I_2, I_3 を求めよ。

(4) 次の不定積分を、有理関数の積分に帰着せよ。

(a) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+9}\,dx$ (b) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x-2x^2}}{2+x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x+\sin x}\,dx$

(5) 次の不定積分を求めよ。

(a) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int\frac{\log x}{x^2}\,dx$

数列の収束に関する補足.

(1) 調和級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ の発散について、精しく見てみよう。

(a) 積分 $\displaystyle\int_{N}^{N+1}\frac{1}{x}dx$ と比較することにより、$\displaystyle\frac{1}{N+1}<\log(N+1)-\log N<\frac{1}{N}$ であることを示せ。

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>\log(N+1)>\log N$ であることを示せ。これより、

$\displaystyle\gamma_N:=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N,\gamma'_N:=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(N+1)$ とおくと、$\gamma_N>\gamma'_N>0$ である。

(c) 数列 (γ_N) が単調減少であること、数列 (γ'_N) が単調増加であること、および、$\gamma_N-\gamma'_N\longrightarrow 0$ であることを示せ。

(d) 従って、数列 $(\gamma_N),(\gamma'_N)$ は同じ値に収束する。（この値を Euler の定数といい、γ と書く。）$0.5<\gamma<1$ であることを示せ。

注：γ の近似値は $\gamma=0.57721\cdots$ であるが、この値が有理数であるかどうかは知られていない（未解決問題）。

(2) 絶対収束する級数 $\displaystyle S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の和の近似値の計算について考える。部分和を $\displaystyle S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ とおき、S との差を $\displaystyle R_N:=S-S_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ とする。

(a) 積分 $\displaystyle\int_{N}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ などと比較することにより、R_N の評価 $\displaystyle\frac{1}{N+1}<R_n<\frac{1}{N}$ を得よ。（従って、S_N を S の値の近似値とする場合、例えば $N=10^6$ まで計算しても、誤差 R_N は 10^{-6} 程度残ることになる。）

(b) 絶対収束する級数 $\displaystyle T=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ を考える。この級数の和 T の値を求めよ。（ヒント：$\displaystyle\frac{1}{n(n+1)}$ の部分分数分解を利用。）

(c) S,T ともに絶対収束するので、和の順番を入れ替えても値は変わらず、$\displaystyle S':=S-T=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+1)}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$ が成り立つ。この級数の部分和 $\displaystyle S'_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2(n+1)}$ を計算して S' の近似値としよう。このときの差 $R'_N:=S'-S'_N$ を積分 $\displaystyle\int_{N}^{+\infty}\frac{1}{x^2(x+1)}dx$ などと比較することにより、R'_N の評価を得よ。この評価から、$T+S'_N$ を S の値の近似値とする場合、誤差 R'_N を 10^{-6} 程度に収まるには N をどの程度にすればよいか考察せよ。

(d) 補助の級数 T の代わりにもっと良い近似が得られ（て値が計算でき）る級数を利用したり、和 S' について更に同様のことを続けたりして、この方法を改良し、更に少ない項の計算で良い近似値が得られるよう工夫してみよ。（このように収束の遅い級数を収束の速い級数に変換することにより、少ない計算で精度の高い近似値を計算する方法を加速法と呼ぶ。定積分の値の数値計算は応用上重要であり、古くから様々な手法が研究されている。）