2019年度春期 **数学BI（微分積分）[情報理工学科クラス]** （担当：角皆）

学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\mathbf{6}}$ （一変数関数の積分の定式化）

(1) $f(x) = x^2$ の $[0, a]$ での定積分 $I = \displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を計算したい。

分割 $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$ を n 等分な分割（即ち $x_i = \dfrac{ia}{n}$）とする。

(a) 各小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ での $f(x)$ の下限 $m_i = \displaystyle\inf_{x \in I_i} f(x)$ および上限 $M_i = \displaystyle\sup_{x \in I_i} f(x)$ は何か。

(b) $s_{\Delta_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ 及び $S_{\Delta_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ を計算せよ。

(c) 任意の n に対して $s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$ であることから、$I = \displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を求めよ。（$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}, \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}$ が、それぞれ存在して等しくなることを確かめよ。）

(2) 閉区間 $I = [-2, 2]$ で定義された次の関数 f が積分可能であることを、定義に基づいて示せ：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ 3 & (x \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

（もちろん直観どおり、$\displaystyle\int_I f(x)dx = 3 \cdot 2 = 6$ である。定義に基づいてこれが示せるように、適切な I の分割を考えよ。）