

学生番号: _____ 氏名: _____

7 (広義積分の収束判定および計算)

(1) 次の広義積分の値を求めよ。

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(c) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

(d) $\int_0^1 \log x dx$

(2) Γ 関数

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$

($s > 0$) について、 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を示せ。(ヒント: 部分積分)

(3) 次の関数 f と自然数 n に対し、定積分

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

の値を求めよ。

$$(a) f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(b) f(x) = x$$

$$(c) f(x) = x^2$$