

2019 年度春期

数学BI（微分積分）

（情報理工学科クラス）

（担当：角皆）

理工学の大学初年級で学ぶ数学

数学の分野 (手法)		解析学 (無限小解析)	代数学
理工学の 大学初年級では		微分積分	線型代数
本学 理工学部 1年次 では	春	数学 BI (微分積分) 数学演習 I	数学 AI (線型代数)
	秋	微分方程式の基礎 数学 BII (多変数微積) 数学 AII (線型空間論) 数学演習 II	
標語的には		不等式の数学	等式の数学

本講義の概要

- 不等式による評価
- 収束・極限の基礎付け (ε - δ 論法)
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式」は
高校まででは殆ど扱わない

不等式なんて高校でやったよ !!

高校で扱った不等式

例：2 次不等式

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

を解け。

解答：

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$(x - 2)(x - 5) < 0$$

従って、

$$2 < x < 5 \quad \square$$

例：2 次方程式

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

を解け。

解答：

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

従って、

$$x = 2, 5 \quad \square$$

「不等式」と言っても、
動作は等式の扱いと同様であった

では、ここで言う

「不等式の数学」

とはどういうものか？

不等式の数学とは？

収束・発散・極限などなど、

それも

- はさみ打ちの原理
- 区分求積法
- 誤差の評価 (**estimate**)

など

不等式の数学とは？

と言っても難しいことではない

使うことはこの程度

- 推移律： $x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$
- 反対称律： $x \leq y, y \leq x \implies x = y$
- 演算との関係：
 - ★ $x \leq y \implies x + a \leq y + a$
 - ★ $a > 0, x \leq y \implies ax \leq ay$
- 三角不等式： $|x + y| \leq |x| + |y|$
(triangle inequality)

三角不等式の使い方

例題：

分銅 X はほぼ 3 g で誤差 0.01 g 未満、

分銅 Y はほぼ 5 g で誤差 0.02 g 未満、

であるとする。

両方合わせるとほぼ何 g で誤差はどれくらいか？

三角不等式の使い方

分銅 X が x g、分銅 Y が y g であるとする。

$$|x - 3| < 0.01, \quad |y - 5| < 0.02$$

合わせるとほぼ $3 + 5 = 8$ g であるのは良からう。

誤差は、 $|(x + y) - (3 + 5)|$ g である。

これはいくら未満か？（上からの評価）

三角不等式の使い方

$$|x - 3| < 0.01, \quad |y - 5| < 0.02$$

$$\begin{aligned} |(x + y) - (3 + 5)| &= |(x - 3) + (y - 5)| \\ &\leq |x - 3| + |y - 5| \\ &< 0.01 + 0.02 \\ &= 0.03 \end{aligned}$$

従って、誤差は 0.03 g 未満。

問 1 :

縦が大体 3cm、横が大体 5cm の長方形の紙がある。

従って、面積は大体

$$3 \times 5 = 15\text{cm}^2$$

である。さて、

面積の誤差が 0.1cm^2 未満

であることを保証するためには、

縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか？

真の縦の長さを x cm、

真の横の長さを y cm としよう。

この時、面積の誤差は $|xy - 15|$ cm² と表せる。

$x = 3 + h$, $y = 5 + k$ とおくと、

h, k がそれぞれ縦横の誤差である。

誤差が δ cm 未満とすると、

$$0 \leq |h| < \delta, \quad 0 \leq |k| < \delta$$

設定 :

$$\begin{cases} x = 3 + h, & 0 \leq |h| < \delta \\ y = 5 + k, & 0 \leq |k| < \delta \end{cases}$$

目標 :

$$|h| < \delta, |k| < \delta \implies |xy - 15| < 0.1$$

となる δ を見付けること

目標 : $|h| < \delta, |k| < \delta \implies |xy - 15| < 0.1$
となる δ を見付けること

- δ は 1 つ見付ければ良い
- 余り小さ過ぎない方が良い
- 余りぎりぎりでなくても良い
→ 桁くらい判れば良いだろう
- 論理的には厳密であること (\equiv ではなくて)
- 誤差の限界 (今は 0.1) が小さくなくても
通用する方法が良い

$$0 \leq |h| < \delta, \quad 0 \leq |k| < \delta$$

$$\begin{aligned} |(3+h)(5+k) - 15| &= |5h + 3k + hk| \\ &\leq 5|h| + 3|k| + |h||k| \\ &< 5\delta + 3\delta + \delta^2 \\ &= 8\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

従って、

$$8\delta + \delta^2 \leq 0.1$$

となれば良い

2次不等式

$$8\delta + \delta^2 \leq 0.1$$

を解くのは大変だ

しかし、

- 誤差の限界 δ が大きい時は興味がない
- ぎりぎりを狙う必要はない

→ 例えば $\delta \leq 1$ という条件付きで考えれば良い

そこで、

$$\delta \leq 1$$

とする。すると、

$$\begin{aligned} 8\delta + \delta^2 &\leq 8\delta + \delta \\ &= 9\delta \end{aligned}$$

であるから、

$$9\delta \leq 0.1$$

となればよい。これより、

$$\delta \leq \frac{0.1}{9} \quad (= 0.0111 \dots)$$

となるので、 $\delta \leq 0.01$ ならばよい。

これと、さっき仮定した

$$\delta \leq 1$$

とを共に満たせば良いので、

$$\delta = \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

に取れる。

従って、縦横の長さの誤差は

0.01cm 未満

であれば良い。

さっき $\delta \leq 1$ とした後に、

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + 1$$

とすることも出来た
(ここだけ見るなら論理的には正しい)

しかし、これだと

$$8\delta + 1 \leq 0.1$$

としなければならなくなってしまい困る

→ 目標を見定めて議論を進める必要性

(技術的な細かい話)

もう少し厳しく、

$$\delta \leq \frac{1}{10} = 0.1$$

としておけば、

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + \frac{1}{100}$$

なので、

$$8\delta + \frac{1}{100} \leq 0.1$$

であれば良い

このような δ なら取ることが出来る

(技術的な細かい話)

しかし、この論法のためには、

0.1 だったらどれくらいにすれば良いか、
かなり注意深く取っておかないと破綻する
(本末転倒)

さっきのように、 $\delta \leq 1$ の下で、

$$\delta^2 \leq \delta$$

で評価しておけば、

誤差の限界が小さくなっても、

後で δ を小さくとれば対応できる

(技術的な細かい話)

勿論、より精密な限界が知りたければ / 必要ならば、

- 2次不等式 $8\delta + \delta^2 \leq 1$ を解くなり、
- もっと精密な評価をするなり、

すればよい / せねばならない

今までは、
誤差の限界が 0.1cm^2 に設定されていて、
その値未満に収めようとしてきたが、

この場合、原理的には、
どんなに厳しい（小さい）限界に対しても、
同様の議論が可能

→ 誤差の限界が 0.001cm^2 だったら？

→ より一般に、誤差の限界を εcm^2 とすると？

問 1+ :

縦が大体 3cm、横が大体 5cm の長方形の紙がある。

従って、面積は大体

$$3 \times 5 = 15\text{cm}^2$$

である。さて、正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

面積の誤差が $\varepsilon \text{ cm}^2$ 未満

であることを保証するためには、

縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか？

任意の (どんなに小さい)

正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対しても、

$$|h| < \delta, |k| < \delta \implies |(3+h)(5+k) - 15| < \varepsilon$$

となる正の実数値 $\delta > 0$ を見付けることが
可能であった

(ε が小さければ δ も小さくしなければ
いけないけれども)

これはどういうことかと言うと、

「 h, k が充分 0 に近ければ、

$(3 + h)(5 + k)$ は充分 $3 \cdot 5 = 15$ に近い」

ということを言っている

これが

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} (3 + h)(5 + k) = 15$$

すなわち

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 5}} xy = 15$$

の実質的な意味内容なのであった !!