前回の復習から

- この部分は写すな
- 自分のノートを見直せ
- 必要があれば補足事項を書き込め

本講義の概要

- 不等式による評価
- 収束・極限の基礎付け（ε-δ 論法）
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式の数学」とは？

収束・発散・極限などなど、それも

- **はさみ打ちの原理**
- **区分求積法**
- **誤差の評価 (estimate)**

など

問 1^{+}：

縦が大体 3cm、**横が大体** 5cm **の長方形の紙がある。**

従って、面積は大体

$$3 \times 5 = 15\text{cm}^2$$

である。さて、正の実数値 $\varepsilon > 0$ **に対し、**

面積の誤差が ε cm^2 **未満**

であることを保証するためには、

縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか？

真の縦の長さを $(3+h)$ cm、
真の横の長さを $(5+k)$ cm、
誤差が δ cm **未満とすると、**

$$0 \le |h| < \delta, \qquad 0 \le |k| < \delta.$$

$$\begin{aligned} |(3+h)(5+k) - 15| &= |5h + 3k + hk| \\ &\le 5|h| + 3|k| + |h||k| \\ &< 8\delta + \delta^2. \end{aligned}$$

従って、$8\delta + \delta^2 \le \varepsilon$ **となれば良い。**

ここで、（例えば） $\delta \leq 1$ とする。すると、

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + \delta = 9\delta$$

であるから、$9\delta \leq \varepsilon$ となれば良い。これより

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{9}$$

となる。これと、さっき仮定した $\delta \leq 1$ とを共に満たせば良いので、

$$\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{9}\}$$

に取れる。従って、縦横の長さの誤差は

$$\min\{1, \frac{\varepsilon}{9}\} \text{ cm 未満}$$

であれば良い。

任意の（どんなに小さい）
正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対しても、

$$|h| < \delta, |k| < \delta \Longrightarrow |(3+h)(5+k) - 15| < \varepsilon$$

となる正の実数値 $\delta > 0$ を見付けることが
可能であった

（ε が小さければ δ も小さくしなければ
いけないけれども）

これはどういうことかと言うと、

「h, k が充分 0 に近ければ、

$(3+h)(5+k)$ は充分 $3\cdot 5 = 15$ に近い」

ということを言っている

これが

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} (3+h)(5+k) = 15$$

或は

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 5}} xy = 15$$

の実質的な意味内容なのであった !!（以上復習）

さて、（詳しく見るために）少し問題を単純にして、

問 2：

一辺が大体 $3\mathrm{cm}$ の正方形
（従って面積は大体 $9\mathrm{cm}^2$）で、

正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

面積の誤差を $\varepsilon\ \mathrm{cm}^2$ 未満にしたければ、

一辺の誤差をどの程度に収めれば良いか。

更に問題を単純にして、

一辺の長さは縦横ともに $(3+h)$ cm **とし、**

誤差は δ cm **未満　（つまり** $|h|<\delta$**）　としよう。**

$$\begin{aligned}|(3+h)^2-9| &= |6h+h^2| \\ &\le 6|h|+|h|^2 \\ &< 6\delta+\delta^2\end{aligned}$$

この後は前回のように $\cdots\cdots$

問 2^+：

関数 $f(x) = x^2$ において、

x を 3 に近付けると $f(x)$ は 9 に近付くようだが、

その誤差について、正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$|f(x) - 9| < \varepsilon$$

となるためには、

x がどの程度 3 に近ければ良いか？

（$|x - 3| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 9| < \varepsilon$ となるには、
δ の値をどれくらいにすれば良いか？）

（$x = 3 + h$ と置くと計算し易い）

これは何をやっているかと言うと、

「h が充分 0 に**近ければ**、
$(3+h)^2$ は充分 9 に**近い**」

ということを言っている

「x が充分 3 に**近ければ**、
x^2 は充分 9 に**近い**」

と言っても良い

これが

$$\lim_{h \to 0} (3 + h)^2 = 9$$

すなわち

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

の実質的な意味内容なのであった !!

どんな（小さな）正の実数 ε に対しても、
或る（都合の良い）正の実数 δ が存在して、
どんな実数 x に対しても、

$$0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon$$

この流儀で $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ を定式化（定義）すると
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

どんな（小さな）正の実数 ε に対しても、
或る（都合の良い）正の実数 δ が存在して、
どんな実数 x に対しても、

$$0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon$$

この流儀で $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ を定式化（定義）すると
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

どんな（小さな）正の実数 ε に対しても、
或る（都合の良い）正の実数 δ が存在して、
どんな実数 x に対しても、

$$0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon$$

この流儀で $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ を定式化（定義）すると
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

ε-δ 流の関数の極限の定義

関数 f **に対し、**

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow b \text{ である}$$

ということを、次で定義する：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ε-δ 流の関数の極限の定義

このとき、

$$f(x) \longrightarrow b \ (x \longrightarrow a)$$

となる b **が一意的である（ことが証明できる）ので、**

この（関数 f **と実数** a **とで定まる値）**b **を**

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

と書き表す

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

ε-δ 流の関数の極限の定義

このとき、

$$f(x) \longrightarrow b \ (x \longrightarrow a)$$

となる b **が一意的である（ことが証明できる）ので、**

この（関数 f **と実数** a **とで定まる値）**b **を**

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

と書き表す

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

ε-δ 流の関数の連続の定義

関数 f **が** $x = a$ **で連続であるとは、**

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow f(a) \text{ である}$$
$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$$

ということであったから、次のようになる：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

問 2^{++}**：**

関数 $f(x) = x^2$ **について、**

f **が** $x = 3$ **で連続であることを（**ε-δ **流で）示せ。**

すなわち、

任意の正の実数値 $\varepsilon > 0$ **に対し、**

或る正の実数 $\delta > 0$ **が存在して、**

任意の実数 x **に対し、**

$$|x - 3| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 3^2| < \varepsilon$$

となること（$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$**）を示せ。**

（$x = 3 + h$ **と置くと計算し易い）**

例題：

(1) 関数 $f(x) = 5x$ **について、**
任意の実数 a **に対し、**
f **が** $x = a$ **で連続であることを示せ。**

(2) 関数 $f(x) = x^3$ **について、**
任意の実数 a **に対し、**
f **が** $x = a$ **で連続であることを示せ。**

記述に関する注意

- 答案は小論文、
  「日本語・数式混じり文」
  で書く<u>文章</u>（計算問題であっても）
- 構成（<u>論理構造</u>）が大切
- 適切に改行する
- 単に数式を書いたら
  「である／が成り立つ」
  という<u>主張</u>（その意味なら「体言止め」で可）

記述に関する注意

- （再掲）単に数式を書いたら
  「である／が成り立つ」
  という主張（その意味なら「体言止め」で可）
- それ以外の場合は適切に
  「とおく／とする／と仮定する」
  「であるとき／ならば」
  「より／なwhile ので／であるから」
  「となればよい／であれば充分である」
  など、接続詞的語句を補う
  （というか、
  これこそが論理構造を示す重要な部分！）

以上のような「不等式の取扱い」を用いて、

「収束」「発散」「極限」などについて、

詳しく調べていこう

ε-δ 流の関数の微分の定義

関数 f が $x = a$ で微分可能であるとは、

$x \longrightarrow a$ **のとき** $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ **が或る実数に収束する**

$$\left(\exists \alpha \in \mathbb{R} : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \longrightarrow \alpha\right)$$

ということであったから、次のようになる：

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha \right| < \varepsilon$$

ε-δ 流の関数の微分の定義

$$\exists\alpha \in \mathbb{R} : \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha \right| < \varepsilon$$

このとき、(この α が一意的であるので、)

$$f'(a) := \alpha$$

と書き、f の a における微分係数という：

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

関数の微分可能性の意味：線型近似

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\alpha\right|<\varepsilon$$

の部分はただの不等式なので、次のようにも書ける：

$$\Big|f(x)-\big(f(a)+\alpha(x-a)\big)\Big|<\varepsilon\,|x-a|$$

$x=a$ **の近くで、**
$f(x)$ **と 1 次関数** $f(a)+\alpha(x-a)$ **とが極めて近い**
（隔たりが $\varepsilon\,|x-a|$ **未満）**

関数の微分可能性の意味：線型近似

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\alpha\right|<\varepsilon$$

の部分はただの不等式なので、次のようにも書ける：

$$\Big|f(x)-\big(f(a)+\alpha(x-a)\big)\Big|<\varepsilon\,|x-a|$$

$x=a$ **の近くで、**
$f(x)$ **と 1 次関数** $f(a)+\alpha(x-a)$ **とが極めて近い**
（隔たりが $\varepsilon\,|x-a|$ **未満）**

関数の微分可能性の意味：線型近似

関数 f が $x = a$ で微分可能であるとは、
$x = a$ の近くで、
$f(x)$ が 1 次関数で "極めて良く" 近似できること

"線型近似"

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow$$
$$\Big| f(x) - \big(f(a) + \alpha(x - a) \big) \Big| < \varepsilon \, |x - a|$$

そのときの 1 次の係数 α が $x = a$ での微分係数

関数の高次の近似

では更に、関数 f が $x = a$ の近くで、
2 次関数で "極めて良く" 近似できるだろうか？

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow$$
$$\left| f(x) - \left(f(a) + \alpha(x - a) + \beta(x - a)^2 \right) \right| < \varepsilon \, |x - a|^2$$

更に続けて、n 次関数で $\cdots$

極限

良く分からないものを、良く分かるもので近似する

無限	$\longrightarrow$	**有限**
連続量 **(analog)**	$\longrightarrow$	**離散量** **(digital)**

極限

良く分からないものを、良く分かるもので近似する

無限	$\longleftrightarrow$	**有限**
連続量 (analog)	$\longleftrightarrow$	**離散量** (digital)

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$
$$= \lim_{n\to\infty}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)$$

$$\Downarrow$$

関数を「多項式の極限」として表すこと

（冪級数・整級数）

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right)$$

$$\Downarrow$$

関数を「多項式の極限」として表すこと

（冪級数・整級数）

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

関数を「多項式の極限」として表すこと

（冪級数・整級数）