（形式的）Taylor 展開

$$f(x) \text{ “} = \text{” } f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\left(= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right)$$

二項展開（a は任意の実数で可）

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$
$$= 1 + ax + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-n+1)}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}$$

：二項係数 (binomial coefficient)

無限等比級数の和

$$\frac{1}{1-rx} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n$$
$$= 1 + rx + r^2x^2 + r^3x^3 + \cdots$$

収束（して一致） $\iff |rx| < 1$

$$\iff |x| < \frac{1}{|r|}$$

（この例は念頭に置いておこう）

指数関数・対数関数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

三角関数

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

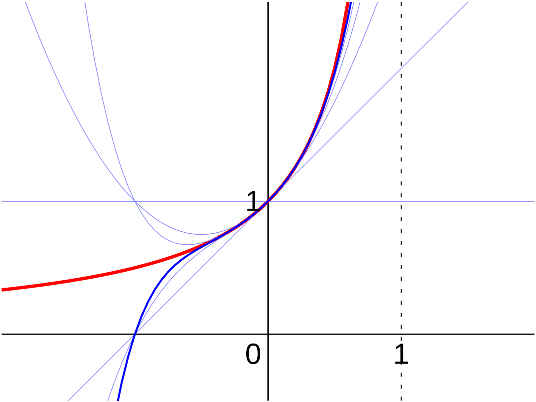
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

Taylor 展開の利点（何が良いか）

- $x = 0$ の近くでの様子が分かる
  - $\star$ 近似値の計算
  - $\star$ $x \to 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く分からない関数の色々な性質が分かる（かも）

例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



Taylor 展開を用いた近似値の計算

例： $\dfrac{1}{1-0.02} =$ **？**　　　$e^{0.02} = \exp(0.02) =$ **？**

$\longrightarrow$ **どの辺で打切るとどの程度の誤差か？**

Taylor 展開を用いた $x \to 0$ の極限の計算

例： $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$ **？**

（形式的）Taylor 展開の計算

高階微分 $f^{(n)}(x)$ の直接計算が難しい場合
（または、$f^{(n)}(x)$ を直接計算しなくても）：

- **既知の公式から（等比級数の和など）**
- **既知の展開に代入**
- **既知の展開から四則演算で**
- **既知の展開から項別微積分で**

$\longrightarrow$ **演習問題参照**

（形式的）Taylor 展開の計算

例題：

(1) $e^{-x^2} = \exp(-x^2)$

(2) $e^x \cos x$

(3) $\dfrac{1}{\cos x}$

(4) $-\log(1-x)$

(5) $e^{x+x^2} = \exp(x+x^2)$

(6) $\dfrac{1}{1-x-x^2}$

Taylor 展開の利点（再掲）

- $x = 0$ の近くでの様子が分かる
  - $\star$ 近似値の計算
  - $\star$ $x \to 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く分からない関数の色々な性質が分かる（かも）

Taylor 展開の欠点

- 大域的性質は判り難い

問題点（考えなくてはならないこと）

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分（極限操作の順序交換）を やってよいか？

今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理”（誤差項の評価）
- 項別微積分

今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理”（誤差項の評価）
- 項別微積分

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$-\frac{1}{2}S = \quad -\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{4} \qquad -\frac{1}{6} \qquad -\frac{1}{8} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}S = 1 \qquad + \frac{1}{3} \qquad + \frac{1}{5} \qquad + \frac{1}{7} \qquad + \cdots$$

例：調和級数

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots \ \textbf{??}$$

例：調和級数

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \\
-\frac{1}{2}S &= \quad - \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{4} \qquad - \frac{1}{6} \qquad - \frac{1}{8} + \cdots \\
-\frac{1}{2}S &= \quad - \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{4} \qquad - \frac{1}{6} \qquad - \frac{1}{8} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \ \textbf{??}
$$

例：調和級数

実は、

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

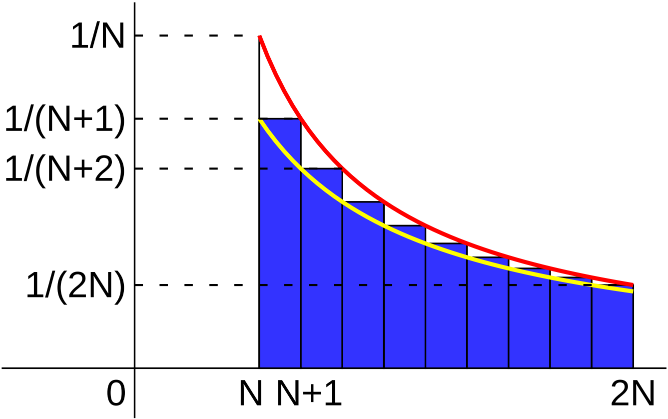
は収束するが、

$$T = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \cdots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + \cdots < 1$$

より $\frac{1}{2} < T < 1$ **（実は** $T = \log 2 \fallingdotseq 0.693$**）**

例：調和級数



例：調和級数

$$T' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

も収束するが、

$$T' = 1 + (\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}) + \cdots > 1$$

$$T' = 1 + \frac{1}{3} + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11})$$
$$+ \cdots < \frac{4}{3}$$

より $1 < T' < \frac{4}{3}$ **（実は** $T' = \frac{3}{2}\log 2 \fallingdotseq 1.040$**）**

例：調和級数

このような奇怪な現象が起こる理由は、

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

が発散することにある：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty \qquad \textbf{!!}$$

例：調和級数

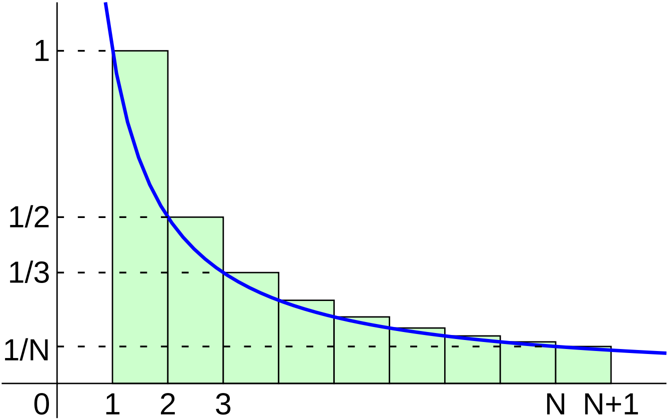
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

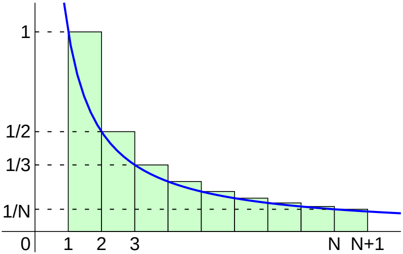
は発散する

例：調和級数



例：調和級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}$$
$$>\int_1^{N+1}\frac{dx}{x}=\log(N+1)\to+\infty\ (N\to\infty)$$



絶対収束・条件収束

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

が収束する一方、各項の絶対値を取った級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

は発散する。

このような収束の場合は非常に繊細だが、
各項の絶対値を取った級数も収束する場合には、
かなり扱い易い性質を持つ $\cdots$ **絶対収束**

絶対収束・条件収束

実数列 (a_n) **に対し、**

$$
\begin{aligned}
a_n^+ &:= \begin{cases} a_n = |a_n| & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases} \\
&= \max\{a_n, 0\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n^- &:= \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases} \\
&= \max\{-a_n, 0\} = -\min\{0, a_n\}
\end{aligned}
$$

とおく

絶対収束・条件収束

例：

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = (1, \quad 0, \quad \frac{1}{3}, \quad 0, \quad \frac{1}{5}, \quad 0, \dots)$$

$$(a_n^-)_{n=1}^{\infty} = (0, \quad \frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{4}, \quad 0, \quad \frac{1}{6}, \dots)$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

絶対収束・条件収束

$$\sum |a_n| \text{：収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- \text{：共に収束}$$

$$\implies \sum a_n \text{：収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない !!

絶対収束・条件収束

$\sum |a_n|$：**収束** $\Longleftrightarrow \sum a_n^+, \sum a_n^-$：**共に収束**

$\Longrightarrow \sum a_n$：**収束**

しかし、一般には逆は成り立たない !!

絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$：共に収束（即ち、$\sum |a_n|$：収束）の時、

「絶対収束 (absolutely convergent)」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 … 正項級数の収束判定

絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$：共に収束しない

（即ち、$\sum |a_n|$：収束しない）が、

$\sum a_n$ は収束する時、

「**条件収束** (**conditionally convergent**)」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- 任意の実数値に収束させることも、
- $+\infty$ に発散させることも、
- $-\infty$ に発散させることも、
- どれでもないようにさせることも、

出来る

正項級数の収束判定

部分和：$S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$$

正項級数 ($a_n > 0$) $\Longleftrightarrow$ **部分和** S_N **が単調増加**

$\longrightarrow$ **単調増加数列の収束判定へ**

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する：$s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する：$s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する：$s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する：$s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する：$s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

数列の収束・発散

単調増加とは限らない

一般の数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **については、**

$n \longrightarrow \infty$ **のとき** $a_n \longrightarrow +\infty$
($(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **が正の無限大に発散)**

とは、

“どんな（大きな）値 M **に対しても**
どこかの番号 N **について**
それより先の番号 $n > N$ **で**
常に a_n **の方が大きい”**

$$\boxed{\forall M : \exists N : \forall n : n > N \Longrightarrow a_n > M}$$

数列の収束・発散

数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$$n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow \alpha$$

($(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **が** α **に収束)**

とは、

“どんな(小さな)正の実数値 $\varepsilon > 0$ **に対しても**
どこかの番号 N **について**
それより先の番号 $n > N$ **で**
常に誤差 $|a_n - \alpha|$ **が** ε **未満”**

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n : n > N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon}$$