

(形式的) Taylor 展開

$$f(x) \text{ “=” } f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ \left(= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)$$

二項展開 (a は任意の実数で可)

$$\begin{aligned}(1+x)^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \\ &= 1 + ax + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots\end{aligned}$$

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

: 二項係数 (**binomial coefficient**)

無限等比級数の和

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-rx} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n \\ &= 1 + rx + r^2 x^2 + r^3 x^3 + \dots\end{aligned}$$

収束 (して一致) $\iff |rx| < 1$

$$\iff |x| < \frac{1}{|r|}$$

(この例は念頭に置いておこう)

指数関数・対数関数

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

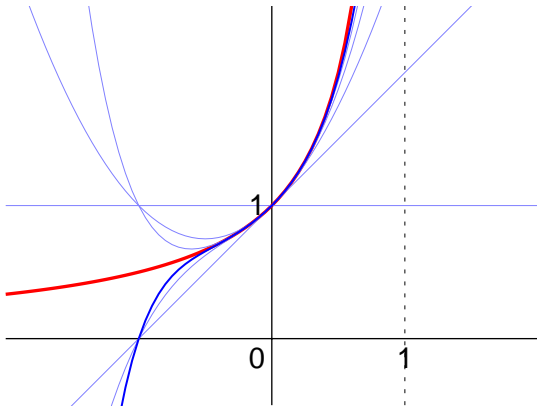
三角関数

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\end{aligned}$$

Taylor 展開の利点 (何が良いか)

- $x = 0$ の近くでの様子が分かる
 - ★ 近似値の計算
 - ★ $x \rightarrow 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く分からない関数の色々な性質が分かる (かも)

例： $f(x) = \frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$



Taylor 展開を用いた近似値の計算

例： $\frac{1}{1-0.02} = ?$ $e^{0.02} = \exp(0.02) = ?$

→ どの辺で打切るとどの程度の誤差か？

Taylor 展開を用いた $x \rightarrow 0$ の極限の計算

例： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$

(形式的) Taylor 展開の計算

高階微分 $f^{(n)}(x)$ の直接計算が難しい場合
(または、 $f^{(n)}(x)$ を直接計算しなくても):

- 既知の公式から (等比級数の和など)
- 既知の展開に代入
- 既知の展開から四則演算で
- 既知の展開から項別微積分で

→ 演習問題参照

(形式的) Taylor 展開の計算

例題：

$$(1) e^{-x^2} = \exp(-x^2)$$

$$(2) e^x \cos x$$

$$(3) \frac{1}{\cos x}$$

$$(4) -\log(1-x)$$

$$(5) e^{x+x^2} = \exp(x+x^2)$$

$$(6) \frac{1}{1-x-x^2}$$

Taylor 展開の利点 (再掲)

- $x = 0$ の近くでの様子が分かる
 - ★ 近似値の計算
 - ★ $x \rightarrow 0$ の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く分からない関数の色々な性質が分かる (かも)

Taylor 展開の欠点

- 大域的性質は判り難い

問題点 (考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を
やってよいか？

今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理”（誤差項の評価）
- 項別微積分

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S = 1 \quad + \frac{1}{3} \quad + \frac{1}{5} \quad + \frac{1}{7} \quad + \dots$$

例：調和級数

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

⇓

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots ??$$

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots ??$$

例：調和級数

実は、

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

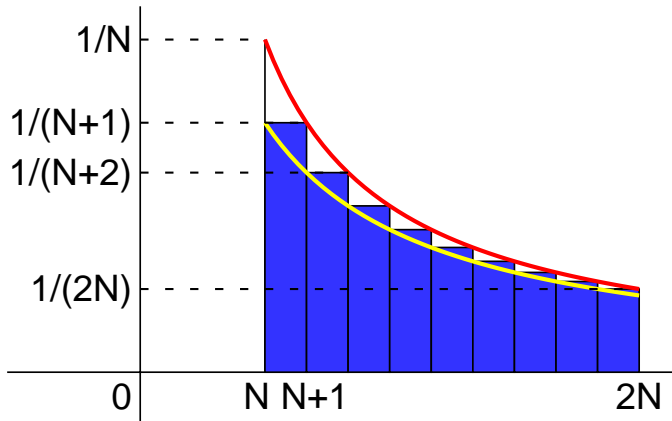
は収束するが、

$$T = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \dots > \frac{1}{2}$$

$$T = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + \dots < 1$$

より $\frac{1}{2} < T < 1$ (実は $T = \log 2 \doteq 0.693$)

例：調和級数



例：調和級数

$$T' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

も収束するが、

$$T' = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \dots > 1$$

$$T' = 1 + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) \\ + \dots < \frac{4}{3}$$

より $1 < T' < \frac{4}{3}$ (実は $T' = \frac{3}{2} \log 2 \doteq 1.040$)

例：調和級数

このような奇怪な現象が起こる理由は、

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

が発散することにある：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty \quad !!$$

例：調和級数

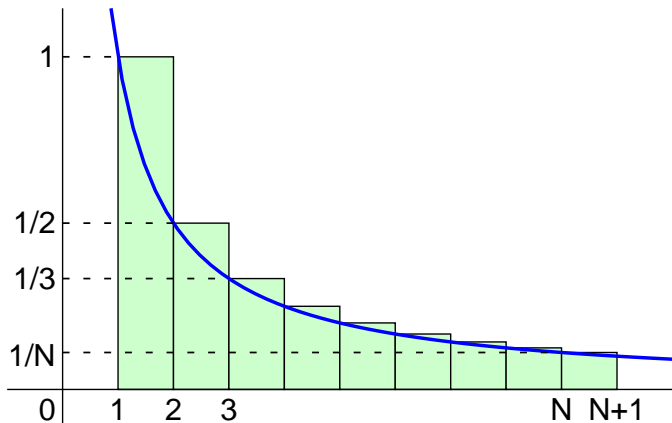
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

は発散する

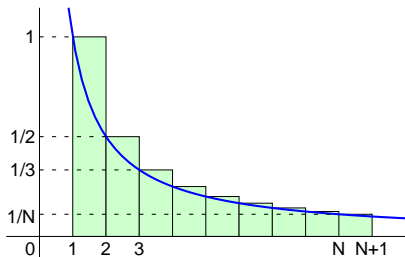
例：調和級数



例：調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

$$> \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1) \rightarrow +\infty \quad (N \rightarrow \infty)$$



絶対収束・条件収束

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

が収束する一方、各項の絶対値を取った級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

は発散する。

このような収束の場合は非常に繊細だが、
各項の絶対値を取った級数も収束する場合には、
かなり扱い易い性質を持つ … **絶対収束**

絶対収束・条件収束

実数列 (a_n) に対し、

$$\begin{aligned} a_n^+ &:= \begin{cases} a_n = |a_n| & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases} \\ &= \max \{a_n, 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n^- &:= \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases} \\ &= \max \{-a_n, 0\} = -\min \{0, a_n\} \end{aligned}$$

とおく

絶対収束・条件収束

例：

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots\right)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = \left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots\right)$$

$$(a_n^-)_{n=1}^{\infty} = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

絶対収束・条件収束

$$\begin{aligned} \sum |a_n| : \text{収束} &\iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \text{共に収束} \\ &\implies \sum a_n : \text{収束} \end{aligned}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$: 共に収束 (即ち、 $\sum |a_n|$: 収束) の時、

「絶対収束 (**absolutely convergent**)」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 ... 正項級数の収束判定

絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$: 共に収束しない
(即ち、 $\sum |a_n|$: 収束しない) が、

$\sum a_n$ は収束する時、

「**条件収束 (conditionally convergent)**」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- 任意の実数値に収束させることも、
- $+\infty$ に発散させることも、
- $-\infty$ に発散させることも、
- どれでもないようにさせることも、

出来る

正項級数の収束判定

部分和：
$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

正項級数 ($a_n > 0$) \iff 部分和 S_N が単調増加

→ 単調増加数列の収束判定へ

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する： $s_n \longrightarrow +\infty$ 」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists n : s_n > M$$

数列の収束・発散

単調増加とは限らない

一般の数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ については、

$n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow +\infty$
($(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が正の無限大に発散)

とは、

“どんな (大きな) 値 M に対しても
どこかの番号 N について

それより先の番号 $n > N$ で

常に a_n の方が大きい”

$$\forall M : \exists N : \forall n : n > N \implies a_n > M$$

数列の収束・発散

数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow \alpha$
($(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が α に収束)

とは、

“どんな (小さな) 正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対しても
どこかの番号 N について

それより先の番号 $n > N$ で

常に誤差 $|a_n - \alpha|$ が ε 未満”

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n : n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$