

## 今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理”（誤差項の評価）
- 項別微積分

## 例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

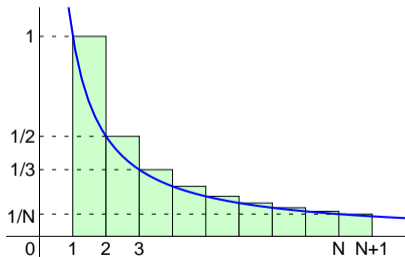
$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

は発散する

## 例：調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

$$> \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1) \rightarrow +\infty \quad (N \rightarrow \infty)$$



## 絶対収束・条件収束

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

が収束する一方、各項の絶対値を取った級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

は発散する。

このような収束の場合は非常に繊細だが、  
各項の絶対値を取った級数も収束する場合には、  
かなり扱い易い性質を持つ … **絶対収束**

## 絶対収束・条件収束

実数列  $(a_n)$  に対し、

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n = |a_n| & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases}$$

$$a_n^- := \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases}$$

とおくと、

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

## 絶対収束・条件収束

$$\begin{aligned} \sum |a_n| : \text{収束} &\iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \text{共に収束} \\ &\implies \sum a_n : \text{収束} \end{aligned}$$

しかし、一般には逆は成り立たない!!

## 絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+$ ,  $\sum a_n^-$  : 共に収束 (即ち、 $\sum |a_n|$  : 収束) の時、

「絶対収束 (**absolutely convergent**)」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 ... 正項級数の収束判定

## 絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+$ ,  $\sum a_n^-$  : 共に収束しない  
(即ち、 $\sum |a_n|$  : 収束しない) が、

$\sum a_n$  は収束する時、

「**条件収束 (conditionally convergent)**」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- 任意の実数値に収束させることも、
- $+\infty$  に発散させることも、
- $-\infty$  に発散させることも、
- どれでもないようにさせることも、

出来る



## 正項級数の収束判定

部分和：
$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

正項級数 ( $a_n > 0$ )  $\iff$  部分和  $S_N$  が単調増加

→ 単調増加数列の収束判定へ

## 単調増加数列の収束判定

「単調増加数列  $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$  が  
正の無限大に発散する： $s_n \longrightarrow +\infty$ 」  
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値  $M$  に対しても  
どこかの番号  $n$  で  $s_n$  の方が大きい”

$$\forall M \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : s_n > M$$

## 数列の収束・発散

単調増加とは限らない

一般の数列  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  については、

$n \rightarrow \infty$  のとき  $a_n \rightarrow +\infty$

( $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  が正の無限大に発散)

とは、

“どんな (大きな) 値  $M$  に対しても

どこかの番号  $N$  について

それより先の番号  $n > N$  で

常に  $a_n$  の方が大きい”

$$\forall M \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > N \implies a_n > M$$

## 数列の収束・発散

数列  $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  について、

$n \longrightarrow \infty$  のとき  $a_n \longrightarrow \alpha$   
( $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  が  $\alpha$  に収束)

とは、

“どんな (小さな) 正の実数値  $\varepsilon > 0$  に対しても  
どこかの番号  $N$  について

それより先の番号  $n > N$  で

常に誤差  $|a_n - \alpha|$  が  $\varepsilon$  未満”

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

## 単調増加数列の収束判定

単調増加数列  $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$  が

$$\lceil \forall M \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : s_n > M \rceil$$

となったら  $+\infty$  に発散

---

収束する為には

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M}$$

でなければならぬ

$M$  : 数列  $s$  の上界 (upper bound)

上界が存在する数列を

上に有界 (bounded above) という

## 単調増加数列の収束判定

単調増加数列  $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$  が

$$\lceil \forall M \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : s_n > M \rceil$$

となったら  $+\infty$  に発散

---

収束する為には

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M$$

でなければならぬ

$M$  : 数列  $s$  の上界 (upper bound)

上界が存在する数列を

上に有界 (bounded above) という

## 単調増加数列の収束判定

単調増加数列  $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$  が

$$\lceil \forall M \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : s_n > M \rceil$$

となったら  $+\infty$  に発散

---

収束する為には

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M$$

でなければならぬ

$M$  : 数列  $s$  の上界 (upper bound)

上界が存在する数列を

上に有界 (bounded above) という

## 単調増加数列の収束判定

単調増加数列  $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$  が収束する為には、  
上に有界、即ち、

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M$$

でなければならぬ

では、逆に、

単調増加数列  $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$  が上に有界なら、

或る実数値に収束するのか？



## 単調増加数列の収束判定

単調増加数列  $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$  が収束する為には、  
上に有界、即ち、

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M$$

でなければならぬ

では、逆に、

単調増加数列  $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$  が上に有界なら、

或る実数値に収束するのか？

定理：単調増加数列が収束  $\iff$  上に有界

即ち、単調増加数列  $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$  について、

$s$  : 収束  $\iff \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M$

しかも、極限值は  $s$  の最小上界 (上限)

(least upper bound, supremum)

$$\sup s = \sup_{n \geq 0} s_n = \sup \{s_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$:= \min \{M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M\}$$

とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sup s$$

定理：単調増加数列が収束  $\iff$  上に有界

即ち、単調増加数列  $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$  について、

$s$  : 収束  $\iff \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M$

しかも、極限值は  $s$  の**最小上界** ( **上限** )

(least upper bound, **supremum**)

$$\sup s = \sup_{n \geq 0} s_n = \sup \{s_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$:= \min \{M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M\}$$

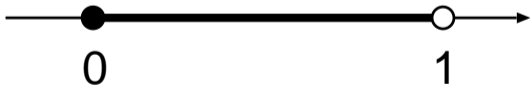
とするととき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sup s$$

## 上限・下限について

例：半開区間  $I = [0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$

I に最大値はないが、  
どう見ても 1 が “最大値みたいな値” である



## 上限・下限について

1 は最小の上界：

- 1 が上界である： $\forall x \in I : x \leq 1$
- 1 より少しでも小さくしたら上界でない：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in I : x > 1 - \varepsilon$$

“どんな（小さな）正の数  $\varepsilon$  についても  
或る（うまい/まずい） $x \in I$  があって  
 $x$  が  $1 - \varepsilon$  を超える”

このことを、

1 が  $I$  の**上限 (supremum)** である

と言い、 $\sup I = 1$  と書く

## 上限・下限について

一般に、

実数全体の集合  $\mathbb{R}$  の部分集合  $S \subset \mathbb{R}$  に対し、  
実数  $a \in \mathbb{R}$  が次を満たす

(即ち、 $a$  が  $S$  の最小の上界である) とき、  
 $a$  が  $S$  の**上限**であるといい、 $a = \sup S$  と書く：

- $\forall x \in S : x \leq a$   
(即ち、 $a$  が  $S$  の上界 (の一つ) である)
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in S : x > a - \varepsilon$   
(即ち、 $a$  より少しでも小さくしたら  
 $S$  の上界でない)

## 定理

- 単調増加数列が収束  $\iff$  上に有界
- 正項級数が収束  $\iff$  部分和が有界

即ち、 $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$  の時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n : \text{収束} \iff \exists M \in \mathbb{R} : \forall N \in \mathbb{N} : \sum_{n=0}^N a_n \leq M$$

しかも、

- 極限值は部分和の**最小上界**（**上限**）
- 部分和は“飛び飛びの和”も考えても同じ
- 順番を入替えても同じ値に収束

極限值は部分和の最小上界 ( **上限** )

(least upper bound, **supremum**)

$$M_0 := \min \left\{ M \in \mathbb{R} \mid \forall N \in \mathbb{N} : \sum_{n=0}^N a_n \leq M \right\}$$
$$= \sup \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \mid N = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

とするととき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = M_0.$$



## 定理

- 単調増加数列が収束  $\iff$  上に有界
- 極限值は数列の最小上界（上限）

このことの証明のうち、

「単調増加数列に上限が存在すれば、  
その値に収束する」

という部分の証明は容易。

しかしながら、

「単調増加数列に上限が存在する」

ということの証明は、実は

実数とは何か？

に立ち戻らなければならない

本授業ではそこまでは立ち戻らず、

これを実数の基本性質として認めることとする

詳しく学びたい人は、秋学期の

「現代数学 B」(全学共通科目)

を受講されたい

## 収束・発散の判定法

さて、具体的な数列について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

→ 収束・発散が良く判っている級数と比較する  
(比較判定法)

## 収束・発散の判定法

さて、具体的な数列について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

→ 収束・発散が良く判っている級数と比較する  
(比較判定法)

## 比較判定法（良く判っている級数と比較）

正項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  について、

$\forall n : a_n \leq b_n$  のとき

- $\sum b_n$  : 収束  $\implies \sum a_n$  : 収束
- $\sum a_n$  : 発散  $\implies \sum b_n$  : 発散

- 途中からでも良い  
( $\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$  でも可)
- 定数倍しても良い  
( $\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$  でも可)

## 比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  について、

$\forall n : a_n \leq b_n$  のとき

- $\sum b_n$  : 収束  $\implies \sum a_n$  : 収束
- $\sum a_n$  : 発散  $\implies \sum b_n$  : 発散

- 途中からでも良い  
( $\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$  でも可)
- 定数倍しても良い  
( $\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$  でも可)

## 比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  について、

$\forall n : a_n \leq b_n$  のとき

- $\sum b_n$  : 収束  $\implies \sum a_n$  : 収束
- $\sum a_n$  : 発散  $\implies \sum b_n$  : 発散

- 途中からでも良い  
( $\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$  でも可)
- 定数倍しても良い  
( $\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$  でも可)

## 比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数  $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$  のとき収束し、その和は  $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$  のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束



## 比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数  $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$  のとき収束し、その和は  $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$  のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束

## 等比級数との比較

$a_n = r^n$  から“隣との比”  $r$  を取り出すには？

- 漸化式： $a_{n+1} = r a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項： $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列  $(a_n)$  に対しても、

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$  や  $\sqrt[n]{a_n}$  が大体  $r$  くらいなら

振舞は同様だろう

## 等比級数との比較

$a_n = r^n$  から“隣との比”  $r$  を取り出すには？

- 漸化式： $a_{n+1} = r a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項： $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列  $(a_n)$  に対しても、

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$  や  $\sqrt[n]{a_n}$  が大体  $r$  くらいなら

振舞は同様だろう

## d'Alembert の判定法 (比テスト)

正項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  について、

$$\left( \exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \right) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散

## Cauchy の判定法 ( $n$ 乗根テスト )

正項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  について、

$$(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$  収束
- $r > 1 \implies$  発散