今後の課題

- **無限級数の収束・発散の判定**
- **特に、冪級数の場合**
- **“Taylor の定理”（誤差項の評価）**
- **項別微積分**

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

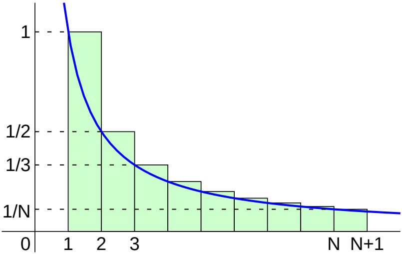
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

は発散する

例：調和級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}$$
$$>\int_1^{N+1}\frac{dx}{x}=\log(N+1)\to+\infty\ (N\to\infty)$$



絶対収束・条件収束

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

が収束する一方、各項の絶対値を取った級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

は発散する。

このような収束の場合は非常に繊細だが、
各項の絶対値を取った級数も収束する場合には、
かなり扱い易い性質を持つ $\cdots$ **絶対収束**

絶対収束・条件収束

実数列 (a_n) **に対し、**

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n = |a_n| & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases}$$

$$a_n^- := \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases}$$

とおくと、

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

絶対収束・条件収束

$$\sum |a_n| : \textbf{収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- : \textbf{共に収束}$$

$$\implies \sum a_n : \textbf{収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない !!

絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$：共に収束（即ち、$\sum |a_n|$：収束）の時、

「**絶対収束 (absolutely convergent)**」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 ⋯ 正項級数の収束判定

絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$：共に収束しない

（即ち、$\sum |a_n|$：収束しない）が、

$\sum a_n$ は収束する時、

「**条件収束 (conditionally convergent)**」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- 任意の実数値に収束させることも、
- $+\infty$ に発散させることも、
- $-\infty$ に発散させることも、
- どれでもないようにさせることも、

出来る

正項級数の収束判定

部分和：$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$$

正項級数 ($a_n > 0$) $\Longleftrightarrow$ **部分和** S_N **が単調増加**

$\longrightarrow$ **単調増加数列の収束判定へ**

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する：$s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : s_n > M}$$

数列の収束・発散

単調増加とは限らない

一般の数列 $a=(a_n)_{n=0}^{\infty}$ については、

$n \longrightarrow \infty$ のとき $a_n \longrightarrow +\infty$
($a=(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が正の無限大に発散)

とは、

“どんな（大きな）値 M に対して も
どこかの番号 N について
それより先の番号 $n>N$ で
常に a_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Longrightarrow a_n > M}$$

数列の収束・発散

数列 $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$$n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow \alpha$$
$$\text{(}a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \text{ が } \alpha \text{ に収束)}$$

とは、

“どんな（小さな）正の実数値 $\varepsilon > 0$ **に対しても**
どこかの番号 N **について**
それより先の番号 $n > N$ **で**
常に誤差 $|a_n - \alpha|$ **が** ε **未満”**

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon}$$

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$ が

「 $\forall M \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : s_n > M$ **」**

となったら $+\infty$ に発散

収束する為には

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \le M}$$

でなければならぬ

M **: 数列 s の上界 (upper bound)**

上界が存在する数列を

上に有界 (bounded above) という

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$ が収束する為には、

上に有界、即ち、

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M}$$

でなければならぬ

では、逆に、

単調増加数列 $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$ が上に有界なら、

或る実数値に収束するのか？

定理：**単調増加数列が収束** $\Longleftrightarrow$ **上に有界**

即ち、単調増加数列 $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$$s\text{：収束} \Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M$$

しかも、極限値は s **の最小上界（上限）**

(least upper bound, supremum)

$$\sup s = \sup_{n \geq 0} s_n = \sup\{s_n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

$$:= \min\{M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq M\}$$

とするとき、

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \sup\ s$$

上限・下限について

例：半開区間 $I = [0, 1) = \{x | 0 \leq x < 1\}$

I **に最大値はないが、**
どう見ても 1 **が“最大値みたいな値”である**

上限・下限について

1 は最小の上界：

- **1 が上界である：** $\forall x \in I : x \leq 1$
- **1 より少しでも小さくしたら上界でない：**

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in I : x > 1 - \varepsilon$$

“どんな（小さな）正の数 ε についても
或る（うまい／まずい）$x \in I$ があって
x が $1 - \varepsilon$ を超える”

このことを、

1 が I の上限 (supremum) である

と言い、$\sup I = 1$ と書く

上限・下限について

一般に、
実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対し、
実数 $a \in \mathbb{R}$ が次を満たす
（即ち、a が S の最小の上界である）とき、
a が S の上限であるといい、$a = \sup S$ と書く：

- $\forall x \in S : x \leq a$
  （即ち、a が S の上界（の一つ）である）

- $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in S : x > a - \varepsilon$
  （即ち、a より少しでも小さくしたら
  S の上界でない）

定理

- **単調増加数列が収束 $\Longleftrightarrow$ 上に有界**
- **正項級数が収束 $\Longleftrightarrow$ 部分和が有界**

即ち、$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$ **の時、**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ : 収束} \Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall N \in \mathbb{N} : \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M$$

しかも、

- **極限値は部分和の最小上界（上限）**
- **部分和は “飛び飛びの和” も考えても同じ**
- **順番を入替えても同じ値に収束**

極限値は部分和の最小上界（上限）
(least upper bound, supremum)

$$M_0 := \min \left\{ M \in \mathbb{R} \;\middle|\; \forall N \in \mathbb{N} : \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M \right\}$$
$$= \sup \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n \;\middle|\; N = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

とするとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = M_0.$$

定理

- **単調増加数列が収束 $\Longleftrightarrow$ 上に有界**
- **極限値は数列の最小上界（上限）**

このことの証明のうち、

「単調増加数列に上限が存在すれば、
その値に収束する」

という部分の証明は容易。

しかしながら、

「単調増加数列に上限が存在する」

ということの証明は、実は

$\boxed{\text{実数とは何か？}}$

に立ち戻らなければならない

本授業ではそこまでは立ち戻らず、
これを実数の基本性質として認めることとする

詳しく学びたい人は、秋学期の
「現代数学 B」（全学共通科目）
を受講されたい

収束・発散の判定法

さて、具体的な数列について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

$\longrightarrow$ **収束・発散が良く判っている級数と比較する（比較判定法）**

比較判定法（良く判っている級数と比較）

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **について、**

$\forall n : a_n \leq b_n$ **のとき**

- $\sum b_n$ **：収束** $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ **：収束**
- $\sum a_n$ **：発散** $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ **：発散**

- **途中からでも良い**
  （$\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ **でも可）**
- **定数倍しても良い**
  （$\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq C b_n$ **でも可）**

比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**"隣との比"**$| < 1$ **くらいなら収束**

等比級数との比較

$a_n = r^n$ **から "隣との比"** r **を取り出すには？**

- **漸化式：** $a_{n+1} = r a_n \to \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- **一般項：** $a_n = r^n \to \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ **一般の数列** (a_n) **に対しても、**
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ **や** $\sqrt[n]{a_n}$ **が大体** r **くらいなら**
振舞は同様だろう

d'Alembert の判定法（比テスト）

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **について、**

$$\boxed{\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r\right) \Longrightarrow \sum a_n : \text{収束}}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad \text{（収束）}$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

Cauchy の判定法（n 乗根テスト）

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について、

$$\boxed{(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \Longrightarrow \sum a_n \text{：収束}}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad \text{（収束）}$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ 収束
- $r > 1 \Longrightarrow$ 発散