

中間試験のお知らせ

6月17日(月) 13:30 ~ 15:00

紀-B210 教室 (ここ)

- Taylor 展開を巡る諸々
(前の週(6/10)の講義内容まで)
- 学生証必携

詳細は追って

収束・発散の判定法

具体的な級数について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

→ 収束・発散が良く判っている級数と比較する
(比較判定法)

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ について、

$\forall n : a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n : \text{収束} \implies \sum a_n : \text{収束}$
- $\sum a_n : \text{発散} \implies \sum b_n : \text{発散}$

- 途中からでも良い

($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)

- 定数倍しても良い

($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$ でも可)

合わせて、

$\exists C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : a_n \leq Cb_n$ でも可

比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数 $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$ のとき収束し、その和は $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束

等比級数との比較

$a_n = r^n$ から“隣との比” r を取り出すには？

- 漸化式： $a_{n+1} = r a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項： $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列 (a_n) に対しても、

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら

振舞は同様だろう

d'Alembert の判定法 (比テスト)

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について、

$$\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \right) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について、

$$(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

例題

次の級数が絶対収束するような x の範囲は？

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} n2^n x^n$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

指数関数は多項式より遥かに強い!!

典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

指数関数は多項式より遥かに強い!!

d'Alembert の判定法 (比テスト)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

で、 $r = 1$ の時は判定不能 (両方有り得る)

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < 1$$

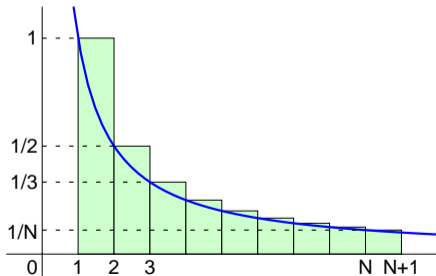
であっても、収束するとは限らない!!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意 !!

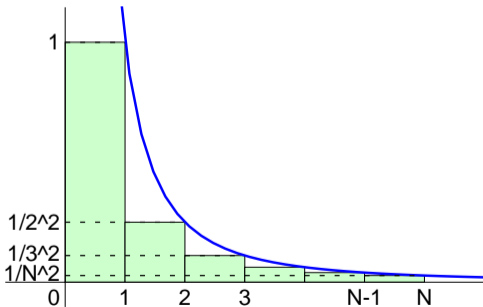
例：調和級数

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > \int_1^{N+1} \frac{dx}{x}$$
$$= \log(N+1) \rightarrow +\infty \quad (N \rightarrow \infty)$$



一方、

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^N \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{N} < 2 \quad : \text{有界}$$



というわけで、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \quad \text{だが、} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \implies \text{発散} \\ s > 1 \implies \text{収束} \end{cases}$$

→ $s > 1$ で s の関数を定めている

というわけで、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \quad \text{だが、} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \implies \text{発散} \\ s > 1 \implies \text{収束} \end{cases}$$

→ $s > 1$ で s の関数を定めている

というわけで、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \quad \text{だが、} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \implies \text{発散} \\ s > 1 \implies \text{収束} \end{cases}$$

→ $s > 1$ で s の関数を定めている

Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad : s > 1 \text{ で絶対収束}$$

(この範囲で s の関数を定めている)
… **Riemann のゼータ関数**

この $\zeta(s)$ の性質に関する重要な予想：

「Riemann 予想」

→ 素数分布などに関連

Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad : s > 1 \text{ で絶対収束}$$

(この範囲で s の関数を定めている)
… **Riemann のゼータ関数**

この $\zeta(s)$ の性質に関する重要な予想：

「**Riemann 予想**」

→ 素数分布などに関連

Riemann のゼータ関数の特殊値 (お話)

Euler (18世紀):

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4$$

$$\zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6$$

⋮

$$\zeta(2m) = (\text{有理数}) \times \pi^{2m}$$

($m = 1, 2, 3, \dots$)

Riemann のゼータ関数の特殊値（お話）

- $\zeta(3)$: 有理数でない (Apéry, 1978)
- $\zeta(2m+1)$ 達の中に無理数が無限個
(Rivoal, 2000)
- $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$ の中の
少なくとも 1 つは無理数
(Rivoal, 2001)
- $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ の中の
少なくとも 1 つは無理数
(Zudilin, 2001)

→ これらの値（特殊値）の数論的性質は
現在でも大きな研究テーマ

冪級数の収束判定

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ が収束する } x \text{ の範囲は？}$$

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束
 $\implies |x| < |x_0|$ で絶対収束
- $r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$
: 収束半径 (radius of convergence)

冪級数の収束判定

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が収束する x の範囲は？

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束
 $\implies |x| < |x_0|$ で絶対収束
- $r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$
: 収束半径 (**radius of convergence**)

収束半径

$$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: 収束半径 (radius of convergence)

- $|x| < r \implies$ 絶対収束
- $|x| > r \implies$ 発散
- 全ての实数 x に対し収束 ... $r = \infty$ (便宜上)
- $x = 0$ でしか収束しない ... $r = 0$

注: $|x| = r$ では、収束・発散ともにあり得る

収束半径

$$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: 収束半径 (radius of convergence)

- $|x| < r \implies$ 絶対収束
- $|x| > r \implies$ 発散

- 全ての実数 x に対し収束 ... $r = \infty$ (便宜上)
- $x = 0$ でしか収束しない ... $r = 0$

注: $|x| = r$ では、収束・発散ともにあり得る

収束半径

$$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: 収束半径 (radius of convergence)

- $|x| < r \implies$ 絶対収束
- $|x| > r \implies$ 発散

- 全ての実数 x に対し収束 ... $r = \infty$ (便宜上)
- $x = 0$ でしか収束しない ... $r = 0$

注: $|x| = r$ では、収束・発散ともにあり得る

比テスト (d'Alembert の判定法):

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \implies$ 収束
- $|x| > s^{-1} \implies$ 発散

n 乗根テスト (Cauchy の判定法):

$$\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow \exists s \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $|x| < s^{-1} \implies$ 収束
- $|x| > s^{-1} \implies$ 発散

s^{-1} : 収束半径

例題

次の冪級数の収束半径は？

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} n2^n x^n$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

Taylor 展開の問題点（考えなくてはならないこと）

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分（極限操作の順序交換）を
行なってよいか？

→ “Taylor の定理”

Taylor 展開の問題点（考えなくてはならないこと）

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分（極限操作の順序交換）を行なってよいか？

→ “Taylor の定理”

Taylor 展開の剰余項

“形式的” Taylor 展開

$$\begin{aligned} f(x) &\sim f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}$$

で、右辺の和が収束する時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \left(= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right) = f(x)$$

であるか？

Taylor 展開の剰余項

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$$



$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \longrightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

: N 次の剰余項 (remainder)

Taylor 展開の剰余項

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$$



$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \longrightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

: N 次の剰余項 (remainder)

Taylor 展開の剰余項

形式的 Taylor 展開が収束して、元の関数 $f(x)$ と一致

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$



$$|R_N(f; x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

→ 剰余項 $R_N(f; x)$ の評価 (estimate) が問題

Taylor の定理

$f : \mathbb{N}$ 回微分可能 ($N \geq 1$)

$$R_N(f; x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(f; x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$