中間試験のお知らせ

6月17日(月) 13:30 〜 15:00

紀-B210教室（ここ）

- Taylor展開を巡る諸々
  （前の週(6/10)の講義内容まで）
- 学生証必携

詳細は追って

収束・発散の判定法

具体的な級数について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

$\longrightarrow$ 収束・発散が良く判っている級数と比較する
（比較判定法）

比較判定法（良く判っている級数と比較）

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **について、**

$\forall n : a_n \leq b_n$ **のとき**

- $\sum b_n$ **：収束** $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ **：収束**
- $\sum a_n$ **：発散** $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ **：発散**

  - **途中からでも良い**
    ($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ **でも可)**
  - **定数倍しても良い**
    ($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq C b_n$ **でも可)**

合わせて、

$\exists C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : a_n \leq C b_n$ **でも可**

比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**"隣との比"**$| < 1$ **くらいなら収束**

等比級数との比較

$a_n = r^n$ **から "隣との比"** r **を取り出すには？**

- **漸化式：** $a_{n+1} = ra_n \to \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- **一般項：** $a_n = r^n \to \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ **一般の数列** (a_n) **に対しても、**
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ **や** $\sqrt[n]{a_n}$ **が大体** r **くらいなら**
振舞は同様だろう

d'Alembert の判定法（比テスト）

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **について、**

$$\boxed{\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \le r\right) \Longrightarrow \sum a_n \text{：収束}}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad \text{（収束）}$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

Cauchy の判定法（n 乗根テスト）

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **について、**

$$\boxed{(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \Longrightarrow \sum a_n \textbf{：収束}}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad \textbf{（収束）}$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

例題

次の級数が絶対収束するような x の範囲は？

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n2^n x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に $\forall a \in \mathbb{R}$ **に対し、**

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

指数関数は多項式より遥かに強い !!

d'Alembert の判定法（比テスト）

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r$ **（収束）のとき、**

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

Cauchy の判定法（n 乗根テスト）

$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r$ **（収束）のとき、**

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

で、$r = 1$ の時は判定不能（両方有り得る）

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < 1$$

であっても、収束するとは限らない !!

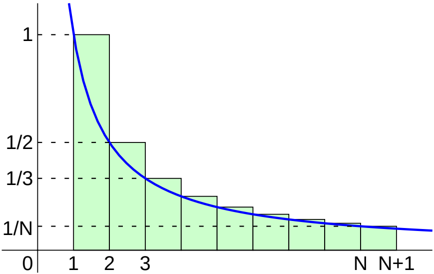
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意 !!

例：調和級数

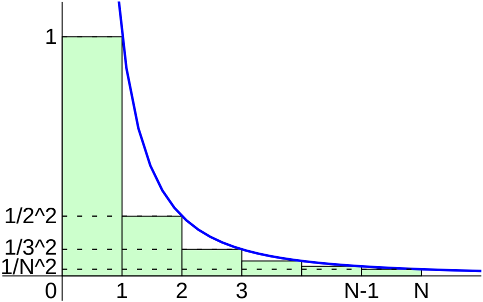
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > \int_{1}^{N+1} \frac{dx}{x}$$

$$= \log(N+1) \to +\infty \quad (N \to \infty)$$



一方、

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^N \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{N} < 2 \quad \text{：有界}$$



というわけで、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{：発散} \qquad \text{だが、} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{：収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \Longrightarrow \text{発散} \\ s > 1 \Longrightarrow \text{収束} \end{cases}$$

$\longrightarrow s > 1$ **で** s **の関数を定めている**

Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad : s > 1 \text{ で絶対収束}$$

（この範囲で s の関数を定めている）

$\cdots$ **Riemann のゼータ関数**

この $\zeta(s)$ の性質に関する重要な予想：

「**Riemann 予想**」

$\longrightarrow$ 素数分布などと関連

Riemann のゼータ関数の特殊値（お話）

Euler（18 世紀）：

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4$$

$$\zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6$$

$$\vdots$$

$$\zeta(2m) = (\textbf{有理数}) \times \pi^{2m}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Riemann のゼータ関数の特殊値（お話）

- $\zeta(3)$：有理数でない (Apéry, 1978)
- $\zeta(2m+1)$ 達の中に無理数が無限個 (Rivoal, 2000)
- $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$ の中の少なくとも 1 つは無理数 (Rivoal, 2001)
- $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ の中の少なくとも 1 つは無理数 (Zudilin, 2001)

$\longrightarrow$ これらの値（特殊値）の数論的性質は現在でも大きな研究テーマ

冪級数の収束判定

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ が収束する } x \text{ の範囲は？}$$

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束
  $\Longrightarrow |x| < |x_0|$ で絶対収束
- $r := \sup\left\{ |x_0| \,\middle|\, \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$
  ：**収束半径 (radius of convergence)**

収束半径

$$r := \sup\left\{|x_0| \,\middle|\, \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束}\right\}$$

：**収束半径 (radius of convergence)**

- $|x| < r \Longrightarrow$ **絶対収束**
- $|x| > r \Longrightarrow$ **発散**

- **全ての実数 x に対し収束** $\cdots$ $r = \infty$（便宜上）
- $x = 0$ **でしか収束しない** $\cdots$ $r = 0$

注：$|x| = r$ **では、収束・発散ともにあり得る**

比テスト（d'Alembert の判定法）：

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow \exists s$$ **（収束）のとき、**

- $|x| < s^{-1} \Longrightarrow$ **収束**
- $|x| > s^{-1} \Longrightarrow$ **発散**

n 乗根テスト（Cauchy の判定法）：

$$\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow \exists s$$ **（収束）のとき、**

- $|x| < s^{-1} \Longrightarrow$ **収束**
- $|x| > s^{-1} \Longrightarrow$ **発散**

s^{-1} **：収束半径**

例題

次の冪級数の収束半径は？

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n2^n x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

Taylor 展開の問題点（考えなくてはならないこと）

- **級数が収束するか？**
- **収束したら元の関数と一致するか？**
- **誤差の理論的評価は？**
- **項別微積分（極限操作の順序交換）を行なってよいか？**

$\longrightarrow$ **“Taylor の定理”**

Taylor 展開の剰余項

“形式的” Taylor 展開

$$f(x) \sim f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

で、右辺の和が収束する時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \left(= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right) = f(x)$$

であるか？

Taylor 展開の剰余項

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right| \longrightarrow 0 \quad (N\to\infty)$$

$$R_N(f;x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

: N 次の剰余項 (remainder)

Taylor 展開の剰余項

形式的 Taylor 展開が収束して、元の関数 $f(x)$ と一致

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\Updownarrow$$

$$|R_N(f;x)| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

$\longrightarrow$ **剰余項 $R_N(f;x)$ の評価 (estimate) が問題**

Taylor の定理

f : N **回微分可能** ($N \geq 1$)

$$R_N(f;x) := f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

とするとき、

$$0 < \exists\theta < 1 : R_N(f;x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N$$