中間試験は鋭意採点中

後半の主な内容は積分だが、

今日は　幕間 (intermission)

その前にちょっと補足

中間試験は鋭意採点中

後半の主な内容は積分だが、

今日は　幕間 (intermission)

その前にちょっと補足

Taylor 展開の問題点（考えなくてはならないこと）

- **級数が収束するか？**
- **収束したら元の関数と一致するか？**
- **誤差の理論的評価は？**
- **項別微積分（極限操作の順序交換）を行なってよいか？**

形式的 Taylor 展開が収束しても、元の関数と一致しない例

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

実は、$f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

従って、形式的 Taylor 展開は 0

しかし勿論 $x > 0$ では $f(x) \neq 0$

形式的 Taylor 展開が収束しても、元の関数と一致しない例

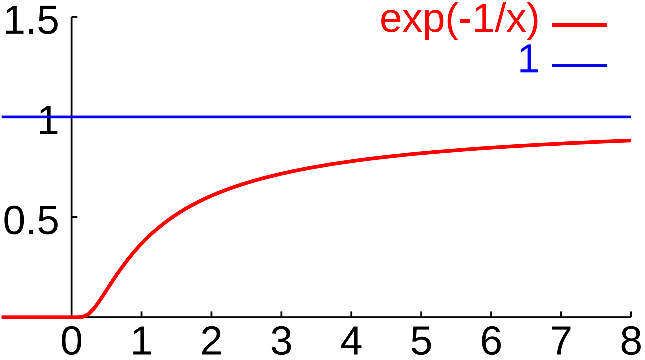
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

実は、 $f^{(n)}(0) = 0$ **(**$n = 0, 1, 2, \ldots$**)**

従って、形式的 Taylor 展開は 0

しかし勿論 $x > 0$ **では** $f(x) \neq 0$

形式的 Taylor 展開が収束しても、元の関数と一致しない例



さてさて、幕間のお話

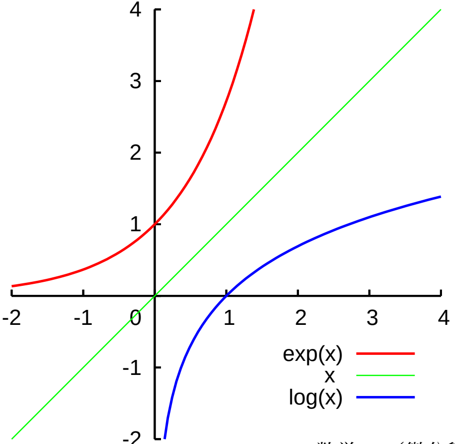
何処に辿り着くやら、お楽しみ

指数関数・対数関数は互いに逆関数

$$y = \exp x \iff x = \log y$$

$$\log(\exp x) = x$$
$$\exp(\log x) = x$$

指数関数・対数関数は互いに逆関数



指数関数：

$y = \exp x$ **は微分方程式**

$$\frac{dy}{dx} = y$$

を満たす。

対数関数：

$y = \log x$ **は積分表示**

$$y = \int_{t=1}^{x} \frac{dt}{t}$$

を持つ。

$\longrightarrow$ **実はこれは表裏一体**

指数関数：

$y = \exp x$ **は微分方程式**

$$\frac{dy}{dx} = y$$

を満たす。

対数関数：

$y = \log x$ **は積分表示**

$$y = \int_{t=1}^{x} \frac{dt}{t}$$

を持つ。

$\longrightarrow$ **実はこれは表裏一体**

三角関数 $y = \sin x$ で同様に考えよう

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

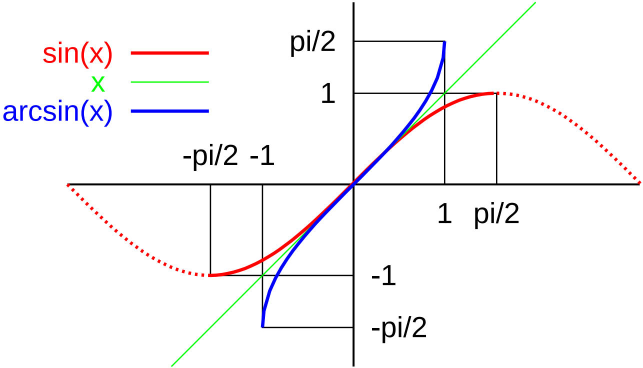
なので、次の微分方程式を満たす：

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

従って、

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$$

$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$



$y = \arcsin x$ の積分表示

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

より

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

従って、

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$y = \arcsin x$ の積分表示

通常 $y = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **と書いてしまうが、**

変数を変えて正式に書けば、

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

ということ。

$x = 0$ **のとき** $\arcsin 0 = 0$ **（即ち** $\sin 0 = 0$**）だから、**

積分の下端は 0 **で良い。**

$y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

二項展開して項別積分すると、

$$\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

$(|x| < 1)$

$y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$

- **定義域**：$-1 \le x \le 1$
- **値域**：$-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ **（主値）**
- **積分表示**：$\arcsin x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

演習問題

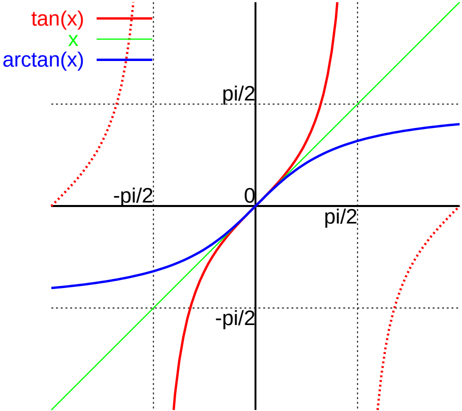
arcsin の時の真似をして、次の手順で
$y = \arctan x$ の Taylor 展開を求めよ

(1) $x = \tan y$ の満たす微分方程式を求める

(2) $\arctan x$ を積分で表す

(3) 被積分関数を Taylor 展開し項別積分する

$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$



$y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$

- **定義域：全実数** x
- **値域：**$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ **（主値）**
- **積分表示：**$\arctan x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

ところで、$\arcsin x, \arctan x$ とも、
Taylor 展開の収束半径は 1 であった。

$\arcsin x$ **は元々定義域が $|x| \leq 1$ なので、**
別に不思議はないが、

$\arctan x$ **は全実数に対して定義できて、**
一見 $|x| < 1$ に限る理由がないし、

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ にも別に変な所はない。

ところで、 $\arcsin x, \arctan x$ **とも、**
Taylor 展開の収束半径は 1 **であった。**

$\arcsin x$ **は元々定義域が** $|x| \leq 1$ **なので、**
別に不思議はないが、

$\arctan x$ **は全実数に対して定義できて、**
一見 $|x| < 1$ **に限る理由がないし、**

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ **にも別に変な所はない。**

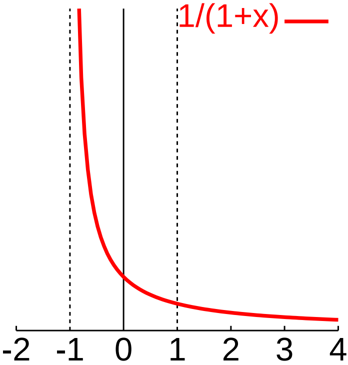
ところで、$\arcsin x, \arctan x$ **とも、**
Taylor 展開の収束半径は 1 **であった。**

$\arcsin x$ **は元々定義域が** $|x| \leq 1$ **なので、**
別に不思議はないが、

$\arctan x$ **は全実数に対して定義できて、**
一見 $|x| < 1$ **に限る理由がないし、**

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ **にも別に変な所はない。**

例： $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$



$x = -1$ **で分母が** $0 \longrightarrow$ **元々そこまで**

実は、複素数まで拡げて考えると、

arctan x **の正体が顕れる !!**

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ **は** $t = \pm i$ **で分母が** 0 **!!**

やはり $|x| = 1$ **の所に越えられぬ障害があった**

($|\pm i| = 1$)

実は、複素数まで拡げて考えると、

$\arctan x$ **の正体が顕れる !!**

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ **は** $t = \pm i$ **で分母が** 0 **!!**

やはり $|x| = 1$ **の所に越えられぬ障害があった**

($|\pm i| = 1$ **)**

実は、複素数まで拡げて考えると、

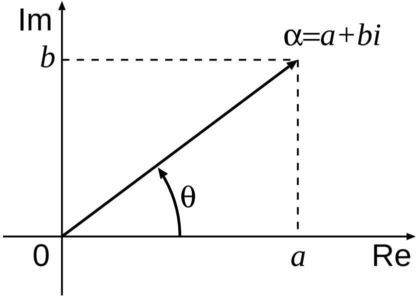
$\arctan x$ **の正体が顕れる !!**

被積分関数 $\dfrac{1}{1+t^2}$ **は** $t = \pm i$ **で分母が** 0 **!!**

やはり $|x| = 1$ **の所に越えられぬ障害があった**

($| \pm i| = 1$**)**

複素数の絶対値・偏角



- $|\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
  ：α **の絶対値 (absolute value)**
- $\arg\alpha = \theta$：α **の偏角 (argument)**
- $\alpha = |\alpha|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

で、x を複素数にすると、

e^x の方は当面は意味不明だが、

右辺の級数は四則演算と極限操作とだけなので意味を持つ

x が複素数の場合も、e^x を右辺の級数で定義してしまおう !!

（$\longrightarrow$ 詳しくは「複素関数論」で）

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

で、x を複素数にすると、

e^x の方は当面は意味不明だが、

右辺の級数は四則演算と極限操作とだけなので意味を持つ

x が複素数の場合も、e^x を右辺の級数で定義してしまおう !!

（$\longrightarrow$ 詳しくは「複素関数論」で）

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

で、x を複素数にすると、

e^x の方は当面は意味不明だが、

右辺の級数は四則演算と極限操作とだけなので意味を持つ

x が複素数の場合も、e^x を右辺の級数で定義してしまおう !!

（$\longrightarrow$ 詳しくは「複素関数論」で）

試しに、

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \\
&\qquad + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}
$$

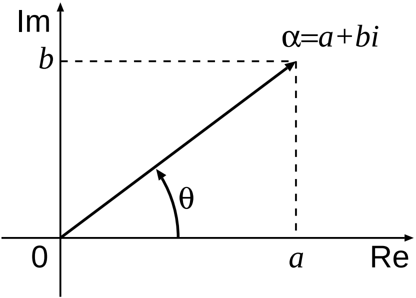
$\boxed{\textbf{Euler の公式：} e^{ix} = \cos x + i \sin x}$

試しに、

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \\
&\qquad + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}
$$

Euler の公式：$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

複素数の極座標表示



$$\begin{cases} r := |\alpha| \\ \theta := \arg \alpha \end{cases}$$ **とおくと、** $$\alpha = re^{i\theta}$$

：α **の極座標表示**

三角関数を指数関数で表す

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\
e^{-ix} &= \cos x - i \sin x
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
\tan x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}
\end{aligned}
$$

三角関数を指数関数で表す

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

これを使うと、

三角関数の諸性質は指数関数の性質に帰着 !!

加法定理 $\longleftarrow$ **指数法則**

双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

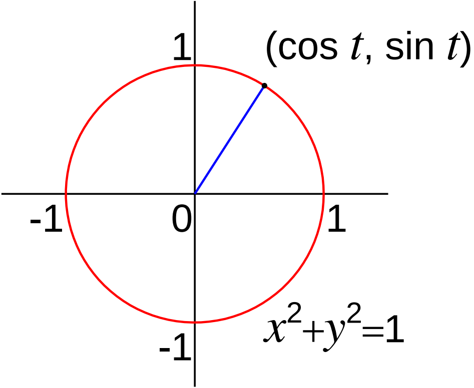
- 三角関数と類似の性質を持つ
- 自然現象の記述にも現れる

双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- **三角関数と類似の性質を持つ**
- **自然現象の記述にも現れる**

$x^2 + y^2 = 1$ の媒介変数表示 $(\cos t, \sin t)$



$x^2 - y^2 = 1$ の媒介変数表示 $(\cosh t, \sinh t)$