

本講義後半の主題は、

積分

である

本講義後半の主題は、

積分

である

## 高校で習った積分

- 逆微分としての「原始関数」  
 $f(x) = F'(x)$  となる  $F$  を求める
- 原始関数の区間両端での値の差としての  
「定積分」  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- 定積分は実は「面積」を表す

## 積分・微分の発見

歴史的には、実は順番が逆で、  
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い

- 「積分」：面積を求める手法の探求  
(エジプト・ギリシャ：2000年以上前)
- 「微分」：物体の運動の数学的探求  
(Newton, Leibniz：17世紀)

それぞれ別のものとして発見されたものが  
実は密接に関連していた!!  
… 「微分積分学の基本定理」

## 積分・微分の発見

歴史的には、実は順番が逆で、  
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い

- 「積分」：面積を求める手法の探求  
(エジプト・ギリシャ：2000年以上前)
- 「微分」：物体の運動の数学的探求  
(Newton, Leibniz：17世紀)

それぞれ別のものとして発見されたものが  
実は密接に関連していた!!  
... 「**微分積分学の基本定理**」

## 積分法

- 統一的な求積法としての「定積分」
- 積分の上端を動かして、  
積分値を上端の関数とみる

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt : \text{「定積分関数」}$$

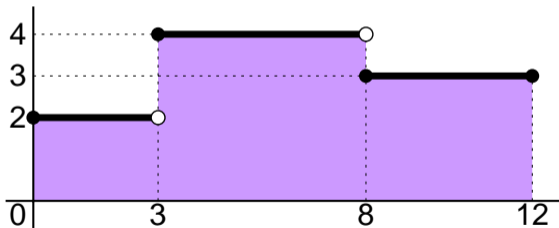
- 実は定積分関数を微分すると元の関数

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

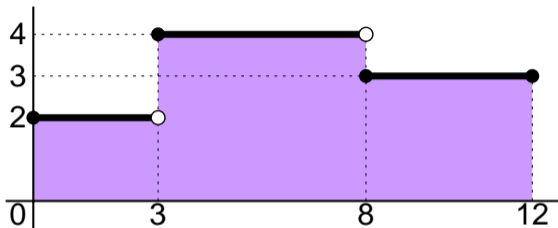
「微分積分学の基本定理」

## 積分の定式化

$$I = \int_0^{12} f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 3) \\ 4 & (3 \leq x < 8) \\ 3 & (8 \leq x \leq 12) \end{cases}$$



## 積分の定式化

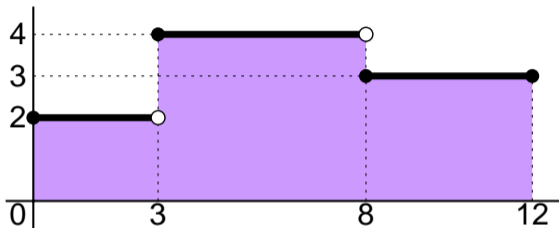


$$\begin{aligned} I &= \int_0^{12} f(x) dx \\ &= 2 \times (3 - 0) + 4 \times (8 - 3) + 3 \times (12 - 8). \end{aligned}$$

「積分」は「積和」である



## 積分の定式化



$$I = \int_0^{12} f(x) dx$$

$$= 2 \times (3 - 0) + 4 \times (8 - 3) + 3 \times (12 - 8).$$

「積分」は「積和」である

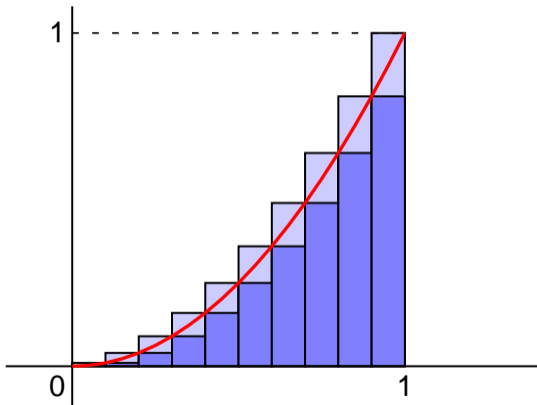
## 積分の定式化

では、

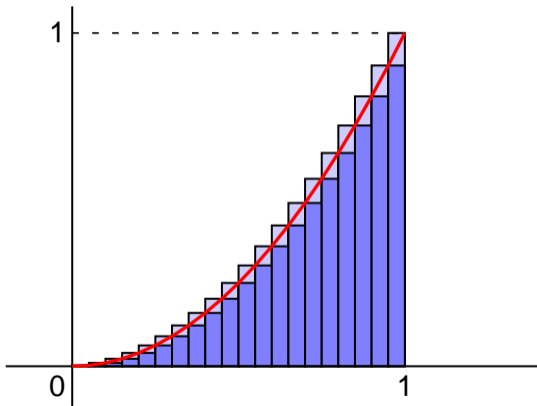
$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad f(x) = x^2$$

はどう考えるか？

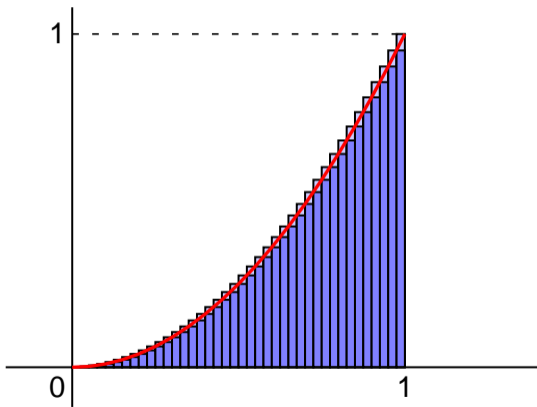
$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x) dx, \quad f(x) = x^2$$



## 演習問題

$f(x) = x^2$  の  $[0, a]$  での定積分

$$I = \int_0^a f(x) dx$$

を、

$[0, a]$  での  $y = x^2$  のグラフの下の部分

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x^2\}$$

の面積として、

次の手順で上下から見積もることにより、

計算しよう。

$$I = \int_0^a f(x) dx$$

分割  $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$  を  
 $n$  等分な分割 (即ち  $x_i = \frac{ia}{n}$ ) とする。

(1) 各小区間  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  に対し、

- 区間幅  $|I_i| := x_i - x_{i-1}$

- $I_i$  での  $f(x)$  の下限

$$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf \{f(x) | x \in I_i\}$$

- $I_i$  での  $f(x)$  の上限

$$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup \{f(x) | x \in I_i\}$$

## 上限・下限について（再掲）

例：半開区間  $I = [0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$

I に最大値はないが、  
どう見ても 1 が “最大値みたいな値” である





## 上限・下限について（再掲）

1 は最小の上界：

- 1 が上界である： $\forall x \in I : x \leq 1$
- 1 より少しでも小さくしたら上界でない：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in I : x > 1 - \varepsilon$$

“どんな（小さな）正の数  $\varepsilon$  についても  
或る（うまい/まずい） $x \in I$  があって  
 $x$  が  $1 - \varepsilon$  を超える”

このことを、

1 が  $I$  の**上限 (supremum)** である

と言い、 $\sup I = 1$  と書く

## 上限・下限について（再掲）

一般に、

実数全体の集合  $\mathbb{R}$  の部分集合  $S \subset \mathbb{R}$  に対し、  
実数  $a \in \mathbb{R}$  が次を満たす

（即ち、 $a$  が  $S$  の最小の上界である）とき、  
 $a$  が  $S$  の**上限**であるといい、 $a = \sup S$  と書く：

- $\forall x \in S : x \leq a$   
（即ち、 $a$  が  $S$  の上界（の一つ）である）
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in S : x > a - \varepsilon$   
（即ち、 $a$  より少しでも小さくしたら  
 $S$  の上界でない）

## (2) 面積の上下からの見積り

- $s_{\Delta_n} := \sum_{i=1}^n m_i |I_i|$
- $S_{\Delta_n} := \sum_{i=1}^n M_i |I_i|$

## (3) $n \longrightarrow \infty$ の極限

- $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n}$
- $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}$

任意の  $n$  に対して

$$s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$$

であることから、

$$s \leq I \leq S$$

である。

ここで、 $s = S$  が成り立つなら、

$$s = S = I$$

となる !!

任意の  $n$  に対して

$$s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$$

であることから、

$$s \leq I \leq S$$

である。

ここで、 $s = S$  が成り立つなら、

$$s = S = I$$

となる !!

## 積分の定式化

どんなに細かく切っても、  
その小区間内で定数になる訳ではないが、  
上下から見積もることは出来るだろう

$$\text{(下からの見積)} \leq \text{(面積)} \leq \text{(上からの見積)}$$

もしあれば

細かく切れば、  
上下からの見積もりが同じ値に近付くなら、  
これを「面積（積分）」と呼んで良いだろう

## 積分の定式化

どんなに細かく切っても、  
その小区間内で定数になる訳ではないが、  
上下から見積もることは出来るだろう

$$\text{(下からの見積)} \leq \text{(面積)} \leq \text{(上からの見積)}$$

もしあれば

細かく切れば、  
上下からの見積もりが同じ値に近付くなら、  
これを「面積（積分）」と呼んで良いだろう

## 積分の定式化

細かく切る方法は  $n$  等分が簡単そうだが、  
これだけを考えるのでは、話がうまく進まない

例えば、基本的な等式

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

を示そうとすると...



## 積分の定式化

細かく切る方法は  $n$  等分が簡単そうだが、  
これだけを考えるのでは、話がうまく進まない

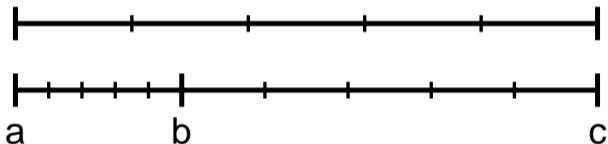
例えば、基本的な等式

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

を示そうとすると...

## 積分の定式化

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

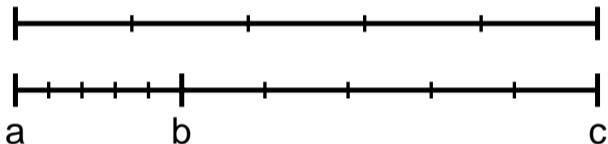


n 等分点が食い違って比較し難い

→ 予め「全ての分割」を考慮に入れて定義せよ!!

## 積分の定式化

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$



$n$  等分点が食い違って比較し難い

→ 予め「全ての分割」を考慮に入れて定義せよ !!

余談 …… 現代数学の手法の特徴（の一つ）:

「苦勞を先に買っておく」

定式化の段階で先に苦勞をしておくと、  
後で証明が楽になる

人間の都合でなく、  
数学のものたちの気持ちに、  
我々の気持ちを合わせる

その代わりに、  
人間には解り難くなることもあるけれど

余談 …… 現代数学の手法の特徴（の一つ）:

「苦勞を先に買っておく」

定式化の段階で先に苦勞をしておくと、  
後で証明が楽になる

人間の都合でなく、  
数学のものたちの気持ちに、  
我々の気持ちを合わせる

その代わり、  
人間には解り難くなることもあるけれど

余談 …… 現代数学の手法の特徴（の一つ）:

「苦勞を先に買っておく」

定式化の段階で先に苦勞をしておくと、  
後で証明が楽になる

人間の都合でなく、  
数学のものたちの気持ちに、  
我々の気持ちを合わせる

その代わり、  
人間には解り難くなることもあるけれど

では、少々苦勞はあるが、

## 「積分」の定義

をきちんとしましょう

## 積分の定義

仮定：

- 積分区間  $I = [a, b]$  : 有界閉区間
- 被積分関数  $f : I$  で有界  
即ち、

$$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$



## 「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

## 「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

## 「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

## 「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

## 「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

## 積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$  : 区間の分割

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$  : 各小区間 ( $i = 1, \dots, n$ )

$|I_i| := x_i - x_{i-1}$  : 区間幅

$\delta(\Delta) := \max_i |I_i|$  : 分割の最大幅

$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in I_i\}$

$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I_i\}$

: 区間  $I_i$  に於ける  $f$  の下限・上限

## 積分の定義

$$s_{\Delta} := \sum_{i=1}^n m_i |I_i|$$

$$S_{\Delta} := \sum_{i=1}^n M_i |I_i|$$

: 分割  $\Delta$  に関する上下からの見積もり

→

$$s_{\Delta} \leq \text{“面積”} \leq S_{\Delta}$$

分割  $\Delta$  を色々考えて、見積もりを精密にせよ。

## 積分の定義

全ての分割  $\Delta$  を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow s := \sup_{\Delta} s_{\Delta} : \text{下積分}$$

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow S := \inf_{\Delta} S_{\Delta} : \text{上積分}$$

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に  $s \leq S$  であるが、 $s = S$  とは限らない !!



## 積分の定義

全ての分割  $\Delta$  を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow s := \sup_{\Delta} s_{\Delta} : \text{下積分}$$

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow S := \inf_{\Delta} S_{\Delta} : \text{上積分}$$

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に  $s \leq S$  であるが、 $s = S$  とは限らない !!

## $s \leq S$ となる例

$$I = [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x : \text{有理数}) \\ 0 & (x : \text{無理数}) \end{cases}$$

任意の分割  $\Delta$  に対し、

$$s_{\Delta} = 0, \quad S_{\Delta} = 1$$

従って、

$$s = 0 \leq S = 1$$

## 積分の定義

$s = S$  のとき、これが“面積”と呼ぶべき唯一の値  
この時、

$f$  は  $I$  で**積分可能 (integrable)**

と言い、

この値を

$$\int_I f(x) dx \quad \left( \text{または} \int_a^b f(x) dx \right)$$

と書いて、

$f$  の  $I$  に於ける**定積分 (definite integral)**

と呼ぶ

例：

$$I = [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

任意の分割  $\Delta$  に対し、 $s_{\Delta} = 0$

一方、 $\forall \varepsilon > 0$  に対し、 $S_{\Delta} \leq \varepsilon$  なる分割  $\Delta$  が存在

従って、

$$s = S = 0 = \int_0^1 f(x) dx$$

例：

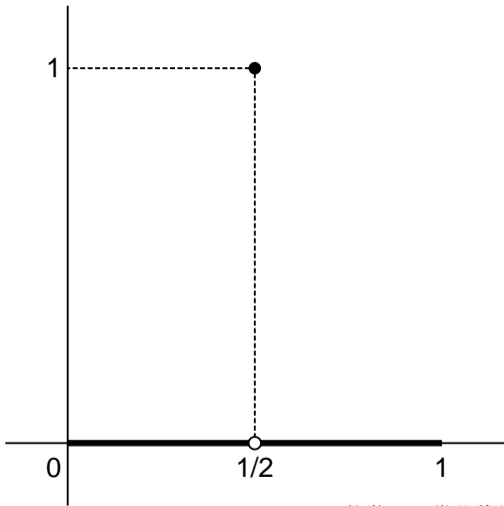
$$I = [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

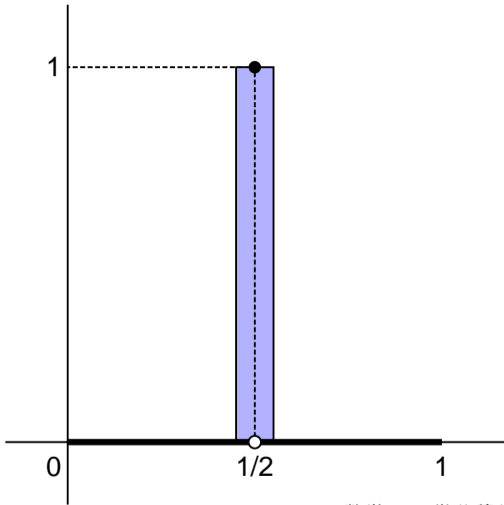
任意の分割  $\Delta$  に対し、 $s_{\Delta} = 0$

一方、 $\forall \varepsilon > 0$  に対し、 $S_{\Delta} \leq \varepsilon$  なる分割  $\Delta$  が存在

従って、

$$s = S = 0 = \int_0^1 f(x) dx$$





任意の分割を考えたので、  
次のような事実の証明が簡明になった

$a < c < b$  とし、

区間  $[a, b]$  に於ける下積分を  $s(a, b)$  と書くと、

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$



任意の分割を考えたので、  
次のような事実の証明が簡明になった

$a < c < b$  とし、

区間  $[a, b]$  に於ける下積分を  $s(a, b)$  と書くと、

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

---

従って、

$f$  が 区間  $[a, c], [c, b]$  で積分可能  
 $\implies f$  は区間  $[a, b]$  でも積分可能で、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ところで、積分を定義するのに  
全ての分割を考えることにしたということは、

- (前回の計算例のように)  
n 等分だけを考えたのでは不十分なのか？
- 実際に計算することは不可能なのではないか？

→ 実は大丈夫で、次の定理が成り立つ

ところで、積分を定義するのに  
全ての分割を考えることにしたということは、

- (前回の計算例のように)  
 $n$  等分だけを考えたのでは不十分なのか？
  
- 実際に計算することは不可能なのではないか？

→ 実は大丈夫で、次の定理が成り立つ

ところで、積分を定義するのに  
全ての分割を考えることにしたということは、

- ( 前回の計算例のように )  
 $n$  等分だけを考えたのでは不十分なのか？
  
- 実際に計算することは不可能なのではないか？

→ 実は大丈夫で、次の定理が成り立つ

## Darboux の定理 :

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$  : 分割の列に対し、

$$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$



$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n} = S$$

(証明略)

つまり、実際の計算は、

$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$  となるような分割の列  $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$   
(で計算し易いもの) を一揃い考えれば充分

## Darboux の定理 :

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$  : 分割の列に対し、

$$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$



$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n} = S$$

(証明略)

つまり、実際の計算は、

$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$  となるような分割の列  $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$   
(で計算し易いもの) を一揃い考えれば充分

定積分の値の見当がついているときには、  
次を利用することも出来る

$$\int_a^b f(x) dx = I$$



任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、  
[a, b] の或る分割  $\Delta = \Delta_\varepsilon$  が存在して、  
 $I - \varepsilon \leq s_\Delta, \quad S_\Delta \leq I + \varepsilon$



さて、先の例のように、  
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、  
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

さて、先の例のように、  
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、  
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

さて、先の例のように、  
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、  
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

定理 (連続関数の積分可能性):

$f$ : 閉区間  $I = [a, b]$  で連続  
(このとき自動的に有界)



$f$ :  $I$  に於いて積分可能