本講義後半の主題は、

積分

である

高校で習った積分

- **逆微分としての「原始関数」**
  $f(x) = F'(x)$ **となる** F **を求める**

- **原始関数の区間両端での値の差としての**
  「定積分」 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

- **定積分は実は「面積」を表す**

積分・微分の発見

歴史的には、実は順番が逆で、
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い

- **「積分」: 面積を求める手法の探求**
  (エジプト・ギリシャ：2000 **年以上前)**

- **「微分」: 物体の運動の数学的探求**
  (Newton, Leibniz：17 **世紀)**

それぞれ別のものとして発見されたものが
実は密接に関連していた !!

$\cdots$ **「微分積分学の基本定理」**

積分法

- 統一的な求積法としての「定積分」
- 積分の上端を動かして、
  積分値を上端の関数とみる

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$ ：「定積分関数」

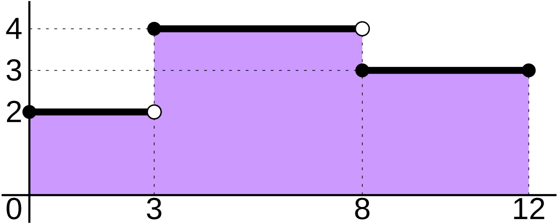
- 実は定積分関数を微分すると元の関数

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

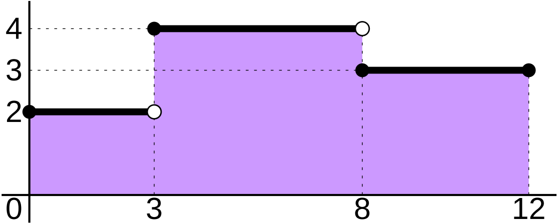
「微分積分学の基本定理」

積分の定式化

$$I = \int_0^{12} f(x)\,dx, \qquad f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \le x < 3) \\ 4 & (3 \le x < 8) \\ 3 & (8 \le x \le 12) \end{cases}$$



積分の定式化



$$I = \int_0^{12} f(x)\,dx$$
$$= 2 \times (3-0) + 4 \times (8-3) + 3 \times (12-8).$$

「積分」は「積和」である

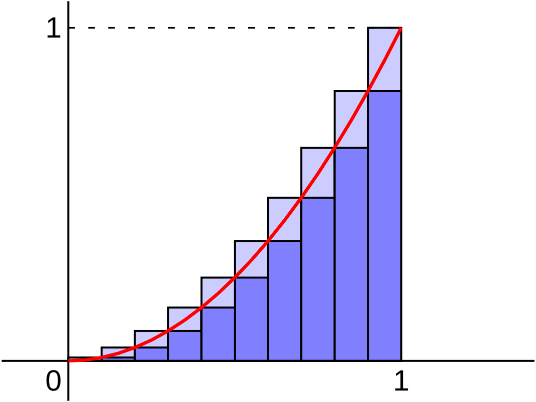
積分の定式化

では、

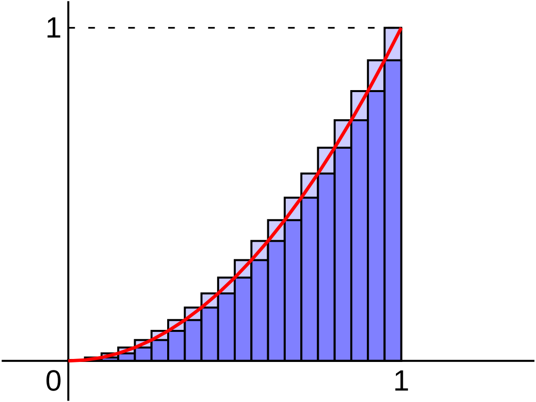
$$I = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f(x) = x^2$$

はどう考えるか？

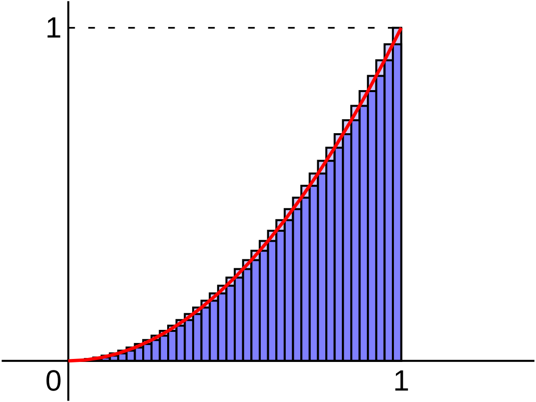
$$I = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f(x) = x^2$$



演習問題

$f(x) = x^2$ の $[0, a]$ での定積分

$$I = \int_0^a f(x)dx$$

を、

$[0, a]$ での $y = x^2$ のグラフの下の部分

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x^2\right\}$$

の面積として、

次の手順で上下から見積もることにより、
計算しよう。

$$I = \int_0^a f(x)dx$$

分割 $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$ **を**

n **等分な分割（即ち** $x_i = \dfrac{ia}{n}$**）とする。**

(1) 各小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ **に対し、**

- **区間幅** $|I_i| := x_i - x_{i-1}$
- I_i **での** $f(x)$ **の下限**
  $m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf\{f(x) | x \in I_i\}$
- I_i **での** $f(x)$ **の上限**
  $M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup\{f(x) | x \in I_i\}$

上限・下限について（再掲）

例：半開区間 $I = [0, 1) = \{x | 0 \leq x < 1\}$

I **に最大値はないが、**
どう見ても 1 **が "最大値みたいな値" である**

上限・下限について（再掲）

1 は最小の上界：

- **1 が上界である：** $\forall x \in I : x \leq 1$
- **1 より少しでも小さくしたら上界でない：**

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in I : x > 1 - \varepsilon$$

“どんな（小さな）正の数 ε についても
或る（うまい／まずい）$x \in I$ があって
x が $1 - \varepsilon$ を超える”

このことを、

1 が I の上限 (supremum) である

と言い、$\sup I = 1$ と書く

上限・下限について（再掲）

一般に、
実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対し、
実数 $a \in \mathbb{R}$ が次を満たす
（即ち、a が S の最小の上界である）とき、
a が S の上限であるといい、$a = \sup S$ と書く：

- $\forall x \in S : x \le a$
  （即ち、a が S の上界（の一つ）である）
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in S : x > a - \varepsilon$
  （即ち、a より少しでも小さくしたら S の上界でない）

(2) 面積の上下からの見積り

- $s_{\Delta_n} := \sum_{i=1}^{n} m_i |I_i|$
- $S_{\Delta_n} := \sum_{i=1}^{n} M_i |I_i|$

(3) $n \longrightarrow \infty$ の極限

- $s := \lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}$
- $S := \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}$

任意の n に対して

$$s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$$

であることから、

$$s \leq I \leq S$$

である。

ここで、$\underline{s = S}$ が成り立つなら、

$$s = S = I$$

となる !!

積分の定式化

どんなに細かく切っても、
その小区間内で定数になる訳ではないが、
上下から見積もることは出来るだろう

（下からの見積）$\leq$（面積）$\leq$（上からの見積）
もしあれば

細かく切れば、
上下からの見積もりが同じ値に近付くなら、
これを「面積（積分）」と呼んで良いだろう

積分の定式化

細かく切る方法は n 等分が簡単そうだが、
これだけを考えるのでは、話がうまく進まない

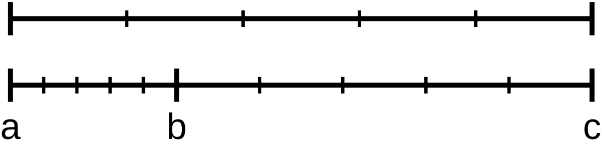
例えば、基本的な等式

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

を示そうとすると $\cdots$

積分の定式化

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$



n 等分点が食い違って比較し難い

$\longrightarrow$ **予め「全ての分割」を考慮に入れて定義せよ !!**

余談 ··· 現代数学の手法の特徴（の一つ）：

「苦労を先に買っておく」

定式化の段階で先に苦労をしておくと、
後で証明が楽になる

人間の都合でなく、
数学のものたちの気持ちに、
我々の気持ちを合わせる

その代わり、
人間には解り難くなることがあるけれど

では、少々苦労はあるが、

「積分」の定義

をきちんとしましょう

積分の定義

仮定：

- **積分区間** $I = [a, b]$ **：有界閉区間**

- **被積分関数** f **：**I **で有界**
  即ち、
  $$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

「積分」の定義の方針

- **区間を分割せよ**
- **各区間で上下から見積もれ**
- **それを足し上げよ**
- **以上を全ての分割について考えよ**
- **上下からの見積が一致するか？**

積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ **：区間の分割**

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$ **：各小区間 (**$i = 1, \ldots, n$**)**

$|I_i| := x_i - x_{i-1}$ **：区間幅**

$\delta(\Delta) := \max_i |I_i|$ **：分割の最大幅**

$$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in I_i\}$$
$$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I_i\}$$

：区間 I_i **に於ける** f **の下限・上限**

積分の定義

$$s_\Delta := \sum_{i=1}^{n} m_i |I_i|$$

$$S_\Delta := \sum_{i=1}^{n} M_i |I_i|$$

：分割 Δ に関する上下からの見積もり

$\longrightarrow$

$$s_\Delta \leq \text{“面積”} \leq S_\Delta$$

分割 Δ を色々考えて、見積もりを精密にせよ。

積分の定義

全ての分割 Δ を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow s := \sup_{\Delta} s_{\Delta} \text{：}\textbf{下積分}$$

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow S := \inf_{\Delta} S_{\Delta} \text{：}\textbf{上積分}$$

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に $s \leq S$ であるが、$s = S$ とは限らない !!

$s \lneq S$ となる例

$$I = [0, 1], \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & (x : \textbf{有理数}) \\ 0 & (x : \textbf{無理数}) \end{cases}$$

任意の分割 Δ に対し、

$$s_\Delta = 0, \quad S_\Delta = 1$$

従って、

$$s = 0 \lneq S = 1$$

積分の定義

$s = S$ のとき、これが "面積" と呼ぶべき唯一の値

この時、

f は I で**積分可能** (**integrable**)

と言い、

この値を

$$\int_I f(x)\,dx \quad \left(\text{または} \int_a^b f(x)\,dx\right)$$

と書いて、

f の I に於ける**定積分** (**definite integral**)

と呼ぶ

例：

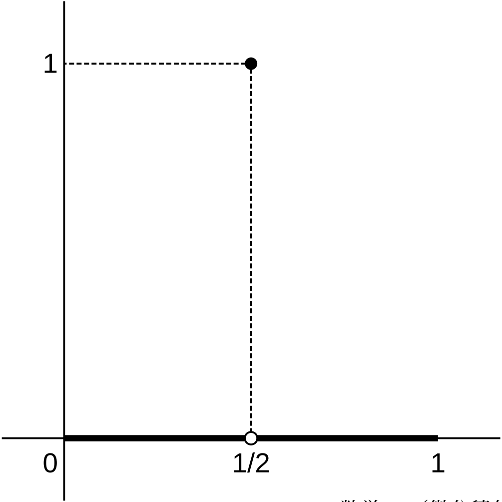
$$I = [0, 1], \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\textbf{それ以外}) \end{cases}$$

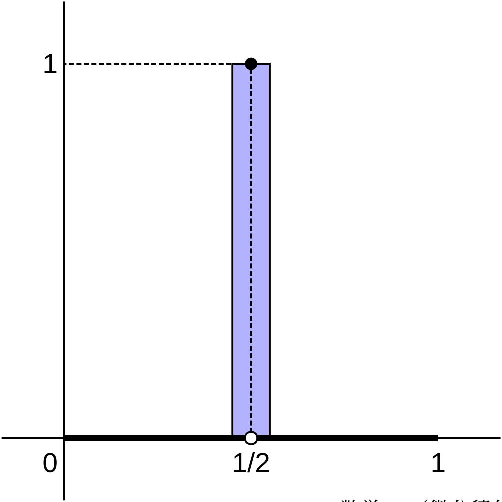
任意の分割 Δ **に対し、**$s_\Delta = 0$

一方、$\forall \varepsilon > 0$ **に対し、**$S_\Delta \leq \varepsilon$ **なる分割** Δ **が存在**

従って、

$$s = S = 0 = \int_0^1 f(x)dx$$


1
0
1/2
1


1
0
1/2
1

任意の分割を考えたので、
次のような事実の証明が簡明になった

$a < c < b$ **とし、**

区間 $[a, b]$ **に於ける下積分を** $s(a, b)$ **と書くと、**

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

$$s(a,b) = s(a,c) + s(c,b)$$
$$S(a,b) = S(a,c) + S(c,b)$$

従って、

> f **が 区間** $[a,c],[c,b]$ **で積分可能**
> $\Longrightarrow f$ **は区間** $[a,b]$ **でも積分可能で、**
> $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ところで、積分を定義するのに
全ての分割を考えることにしたということは、

- **（前回の計算例のように）**
  n 等分だけを考えたのでは不充分なのか？

- **実際に計算することは不可能なのではないか？**

$\longrightarrow$ **実は大丈夫で、次の定理が成り立つ**

Darboux の定理：

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ **：分割の列に対し、**

$$\delta(\Delta_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n} = S$$

（証明略）

つまり、実際の計算は、

$\delta(\Delta_n) \to 0$ **となるような分割の列** $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$

（で計算し易いもの）を一揃い考えれば充分

定積分の値の見当がついているときには、次を利用することも出来る

$$\int_a^b f(x)dx = I$$

$$\Updownarrow$$

任意の $\varepsilon > 0$ **に対し、**
$[a, b]$ **の或る分割** $\Delta = \Delta_\varepsilon$ **が存在して、**

$$I - \varepsilon \leq s_\Delta, \qquad S_\Delta \leq I + \varepsilon$$

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

定理（連続関数の積分可能性）：

f：**閉区間** $I = [a, b]$ **で連続**
（このとき自動的に有界）

$$\Downarrow$$

f：I **に於いて積分可能**