本講義後半の主題は、

積分

である

高校で習った積分

- **逆微分としての「原始関数」**
  $f(x) = F'(x)$ **となる** F **を求める**

- **原始関数の区間両端での値の差としての**
  「定積分」 $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **定積分は実は「面積」を表す**

積分・微分の発見

歴史的には、実は順番が逆で、
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い

- **「積分」：面積を求める手法の探求**
  （エジプト・ギリシャ：2000 年以上前）
- **「微分」：物体の運動の数学的探求**
  （Newton, Leibniz：17 世紀）

それぞれ別のものとして発見されたものが
実は密接に関連していた !!
… **「微分積分学の基本定理」**

積分法

- **統一的な求積法としての「定積分」**
- **積分の上端を動かして、**
  積分値を上端の関数とみる

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$ **：「定積分関数」**

- **実は定積分関数を微分すると元の関数**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

「微分積分学の基本定理」

積分の定義

仮定：

- **積分区間** $I = [a, b]$ **：有界閉区間**
- **被積分関数** f **：** I **で有界**
  即ち、
  $$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

「積分」の定義の方針

- **区間を分割せよ**
- **各区間で上下から見積もれ**
- **それを足し上げよ**
- **以上を全ての分割について考えよ**
- **上下からの見積が一致するか？**

積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$：区間の分割

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$：各小区間 ($i = 1, \ldots, n$)

$|I_i| := x_i - x_{i-1}$：区間幅

$\delta(\Delta) := \max_i |I_i|$：分割の最大幅

$$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in I_i\}$$
$$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I_i\}$$

：区間 I_i に於ける f の下限・上限

積分の定義

$$s_\Delta := \sum_{i=1}^{n} m_i |I_i|$$

$$S_\Delta := \sum_{i=1}^{n} M_i |I_i|$$

：分割 Δ に関する上下からの見積もり

$\longrightarrow$

$$s_\Delta \leq \text{“面積”} \leq S_\Delta$$

分割 Δ を色々考えて、見積もりを精密にせよ。

積分の定義

全ての分割 Δ を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow\ s := \sup_{\Delta} s_\Delta$$ **：下積分**

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow\ S := \inf_{\Delta} S_\Delta$$ **：上積分**

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に $s \leq S$ であるが、$s = S$ とは限らない　!!

積分の定義

$s = S$ **のとき、これが "面積" と呼ぶべき唯一の値**

この時、

f は I で積分可能 (integrable)

と言い、

この値を

$$\int_I f(x)\,dx \qquad \left(\text{または} \int_a^b f(x)\,dx\right)$$

と書いて、

f の I に於ける定積分 (definite integral)

と呼ぶ

例：

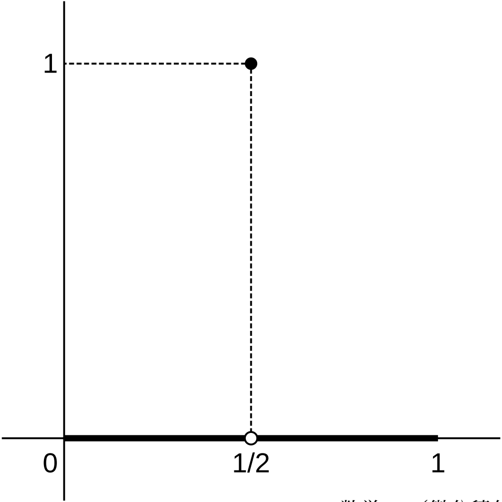
$$I = [0, 1], \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\textbf{それ以外}) \end{cases}$$

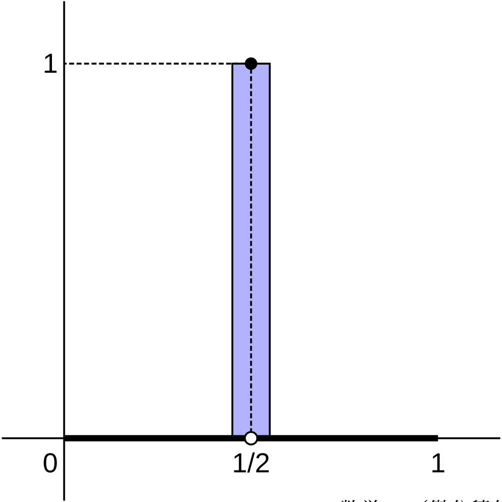
任意の分割 Δ **に対し、** $s_\Delta = 0$

一方、 $\forall \varepsilon > 0$ **に対し、** $S_\Delta \leq \varepsilon$ **なる分割** Δ **が存在**

従って、

$$s = S = 0 = \int_0^1 f(x)dx$$


1
0
1/2
1


1
0
1/2
1

任意の分割を考えたので、
次のような事実の証明が簡明になった

$a < c < b$ **とし、**

区間 $[a, b]$ **に於ける下積分を** $s(a, b)$ **と書くと、**

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

$$s(a,b) = s(a,c) + s(c,b)$$
$$S(a,b) = S(a,c) + S(c,b)$$

従って、

f **が 区間** $[a,c],[c,b]$ **で積分可能**
$\Longrightarrow$ f **は区間** $[a,b]$ **でも積分可能で、**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Riemann 和による積分の定義

定積分の定式化には、
次のような Riemann 和を用いることも多い：

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ **：区間の分割**

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$ **：各小区間 $(i = 1, \ldots, n)$**

$|I_i| := x_i - x_{i-1}$ **：区間幅**

$\Xi = (\xi_i)_{i=1}^n$ **：各小区間から点 $\xi_i \in I_i$ を選ぶ**

Δ, Ξ **に対し、**

$$I(\Delta, \Xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|I_i| \text{：Riemann 和}$$

Riemann 和による積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$：**区間の分割**

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$：**各小区間** $(i = 1, \ldots, n)$

$|I_i| := x_i - x_{i-1}$：**区間幅**

$\delta(\Delta) := \max_i |I_i|$：**分割の最大幅**

$\Xi = (\xi_i)_{i=1}^n$：**各小区間から点** $\xi_i \in I_i$ **を選ぶ**

極限 $\lim_{\delta(\Delta)\to 0} I(\Delta, \Xi)$ **が存在するとき、**

$$\int_I f(x)dx := \lim_{\delta(\Delta)\to 0} I(\Delta, \Xi)$$

Riemann 和による積分の定義

$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} I(\Delta, \Xi)$ って何？

「$\delta(\Delta) \to 0$ で $I(\Delta, \Xi) \longrightarrow I$」

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (\Delta, \Xi) : \\ \delta(\Delta) < \delta \Longrightarrow |I(\Delta, \Xi) - I| < \varepsilon$$

Riemann 和による積分の定義

$\lim\limits_{\delta(\Delta)\to 0} I(\Delta,\Xi)$ **って何？**

「$\delta(\Delta) \to 0$ **で** $I(\Delta,\Xi) \longrightarrow I$**」**

$$\iff \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall(\Delta,\Xi) : \\ \delta(\Delta) < \delta \Longrightarrow |I(\Delta,\Xi) - I| < \varepsilon$$

Riemann 和による積分の定義

Riemann 和 $\displaystyle\lim_{\delta(\Delta)\to 0} I(\Delta,\Xi)$ **による積分の定義は、**
上積分・下積分による定義と一致：

$$s = S \iff \exists \lim_{\delta(\Delta)\to 0} I(\Delta,\Xi)$$

このとき、

$$s = S = \lim_{\delta(\Delta)\to 0} I(\Delta,\Xi)$$

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

定理（連続関数の積分可能性）：

f：**閉区間** $I = [a, b]$ **で連続**
（このとき自動的に有界）

$$\Downarrow$$

f：I **に於いて積分可能**

注：
「f：閉区間 I で連続 $\Longrightarrow$ I で有界」には、
実数の基本性質（実数の連続性）が効いている

本授業ではそこまでは立ち戻らず、
これを認めて議論を進めることとする

定理（連続関数の積分可能性）：

f：**閉区間** $I = [a, b]$ **で連続**
（このとき自動的に有界）

$$\Downarrow$$

f：I **に於いて積分可能**

注：
「f**：閉区間** I **で連続** $\Longrightarrow$ I **で有界」には、**
実数の基本性質（実数の連続性）が効いている

本授業ではそこまでは立ち戻らず、
これを認めて議論を進めることとする

$s(x, y)$：**区間** $[x, y]$ **に於ける下積分**

特に、 $s(x) := s(a, x)$ **と書くとき**

主張：

$s(x)$：$[a, b]$ **で微分可能で、**

$$s'(x) = f(x)$$

即ち、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall h :$$
$$0 < |h| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

$s(x, y)$：**区間** $[x, y]$ **に於ける下積分**

特に、 $s(x) := s(a, x)$ **と書くとき**

主張：

$s(x)$：$[a, b]$ **で微分可能で、**

$$s'(x) = f(x)$$

即ち、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall h :$$

$$0 < |h| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

定理：

f：閉区間 $I = [a, b]$ で連続

（このとき自動的に有界）

$\Downarrow$

f：I に於いて積分可能

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t)dt$$

（上端 x の関数で、定積分関数と呼ぶ）

が f の原始関数になっていることが判る

定理：

f：閉区間 $I = [a, b]$ で連続
（このとき自動的に有界）

$$\Downarrow$$

f：I に於いて積分可能

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t)dt$$

（上端 x の関数で、**定積分関数**と呼ぶ）
が f の**原始関数**になっていることが判る

微分積分学の基本定理

f：**閉区間** $I=[a,b]$ **で連続のとき**

- $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$

  即ち、 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ **とおくと、**

  F **は** f **の原始関数（の一つ）**

- F **を** f **の原始関数（の一つ）とすると、**

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$$

尚、下端 a を取り替えても、

定積分関数は定数の差しかない：

$$\int_a^x f(t)dt - \int_{a'}^x f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt$$

その差を気にしない（下端を指定しない）とき、

単に

$$\int f(x)dx$$

と書き、

f **の不定積分 (indefinite integral) と呼ぶ**

一方、原始関数も、

定数だけ違ってもやはり原始関数

（微分したら同じ）なので、

普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理

f：連続のとき、　不定積分 $=$ 原始関数

$\longrightarrow$ 原始関数（逆微分）を知れば積分が計算できる

$\longrightarrow$ 計算は今までに馴染みの

諸公式・手法によれば良い

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
（微分したら同じ）なので、

普通は定数の差を気にしない

<u>**微分積分学の基本定理**</u>
f **：連続のとき、　不定積分 $=$ 原始関数**

$\longrightarrow$ **原始関数（逆微分）を知れば積分が計算できる**

$\longrightarrow$ **計算は今までに馴染みの**
諸公式・手法によれば良い

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
（微分したら同じ）なので、

普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理
f：**連続のとき、　不定積分** $\equiv$ **原始関数**

$\longrightarrow$ **原始関数（逆微分）を知れば積分が計算できる**

$\longrightarrow$ **計算は今までに馴染みの**
諸公式・手法によれば良い

ところで、前に見た $\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ **で、**

$x = 1$ **とすれば** $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ **だから、**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだが、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない !!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to +\infty \quad (x \to 1-0)$$

ところで、前に見た $\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ **で、**

$x = 1$ **とすれば** $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ **だから、**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだが、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない !!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to +\infty \quad (x \to 1-0)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

と考えたいが、

- **積分区間が半開区間** $I = [0, 1) = \{x | 0 \leq x < 1\}$
- **しかもそこで被積分関数** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **が非有界**

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

$\longrightarrow$ **広義積分・変格積分 (improper integral)**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

と考えたいが、

- 積分区間が半開区間 $I = [0,1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$
- しかもそこで被積分関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ が非有界

このような場合に対しても
積分の定義を拡張しておこう

$\longrightarrow$ **広義積分・変格積分 (improper integral)**

広義積分・変格積分 (improper integral)

- **区間が有界で、端点で関数が非有界**
  例： $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$

- **区間が非有界（無限区間）**
  例： $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

$\longrightarrow$ **共に、収束・発散の判定が重要**

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

f： $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ で定義され、
$x = b$ の近くで非有界だが、
任意の（どんな小さい） $\varepsilon > 0$ に対しても、
$[a, b - \varepsilon] = \{x | a \leq x \leq b - \varepsilon\}$ で
有界かつ積分可能

とするとき、各 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

が定義される

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

が存在するとき、

f **は** $[a, b)$ **で広義積分可能と言い、**

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

と書く（広義積分が収束するとも言う）

区間が非有界（無限区間）な場合

f： $[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$ で定義され、
任意の（どんな大きい） $M > a$ に対しても、
$[a, M] = \{x \mid a \leq x \leq M\}$ で
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x)dx$$

が定義される

区間が非有界（無限区間）な場合

この状況で、

$$\lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

が存在するとき、

f は $[a, +\infty)$ で**広義積分可能**と言い、

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

と書く（広義積分が収束するとも言う）