

本講義後半の主題は、

積分

である

高校で習った積分

- 逆微分としての「原始関数」
 $f(x) = F'(x)$ となる F を求める
- 原始関数の区間両端での値の差としての
「定積分」 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- 定積分は実は「面積」を表す

積分・微分の発見

歴史的には、実は順番が逆で、
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い

- 「積分」：面積を求める手法の探求
(エジプト・ギリシャ：2000年以上前)
- 「微分」：物体の運動の数学的探求
(Newton, Leibniz：17世紀)

それぞれ別のものとして発見されたものが
実は密接に関連していた!!
... 「**微分積分学の基本定理**」

積分法

- 統一的な求積法としての「定積分」
- 積分の上端を動かして、
積分値を上端の関数とみる

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt : \text{「定積分関数」}$$

- 実は定積分関数を微分すると元の関数

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

「微分積分学の基本定理」

積分の定義

仮定：

- 積分区間 $I = [a, b]$: 有界閉区間
- 被積分関数 $f : I$ で有界
即ち、

$$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$: 区間の分割

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$: 各小区間 ($i = 1, \dots, n$)

$|I_i| := x_i - x_{i-1}$: 区間幅

$\delta(\Delta) := \max_i |I_i|$: 分割の最大幅

$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in I_i\}$

$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I_i\}$

: 区間 I_i に於ける f の下限・上限

積分の定義

$$s_{\Delta} := \sum_{i=1}^n m_i |I_i|$$

$$S_{\Delta} := \sum_{i=1}^n M_i |I_i|$$

: 分割 Δ に関する上下からの見積もり

→

$$s_{\Delta} \leq \text{“面積”} \leq S_{\Delta}$$

分割 Δ を色々考えて、見積もりを精密にせよ。

積分の定義

全ての分割 Δ を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow s := \sup_{\Delta} s_{\Delta} : \text{下積分}$$

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow S := \inf_{\Delta} S_{\Delta} : \text{上積分}$$

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に $s \leq S$ であるが、 $s = S$ とは限らない !!

積分の定義

$s = S$ のとき、これが“面積”と呼ぶべき唯一の値
この時、

f は I で**積分可能 (integrable)**

と言い、

この値を

$$\int_I f(x) dx \quad \left(\text{または} \int_a^b f(x) dx \right)$$

と書いて、

f の I に於ける**定積分 (definite integral)**

と呼ぶ

例：

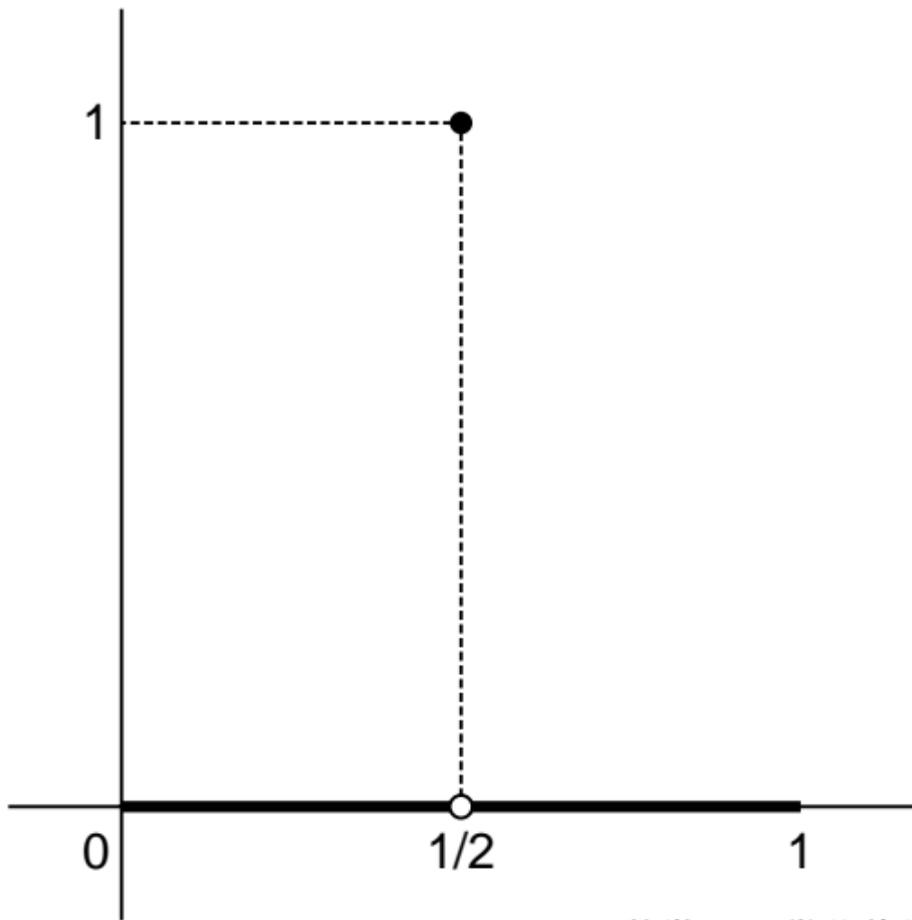
$$I = [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

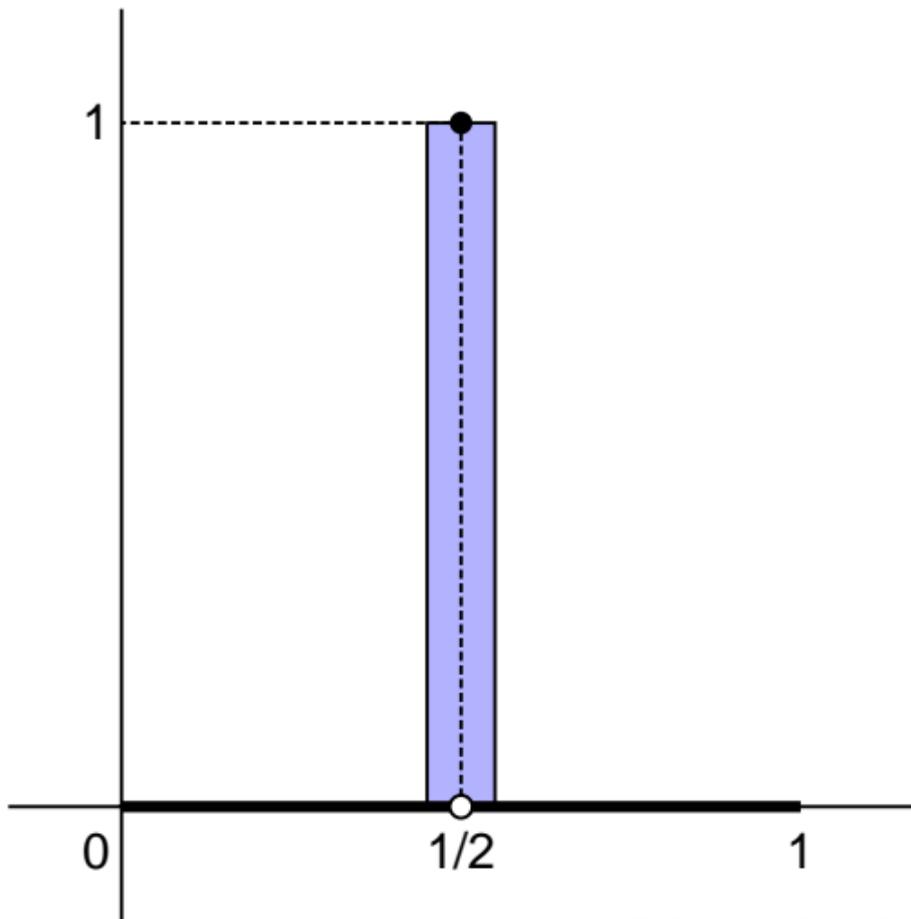
任意の分割 Δ に対し、 $s_{\Delta} = 0$

一方、 $\forall \varepsilon > 0$ に対し、 $S_{\Delta} \leq \varepsilon$ なる分割 Δ が存在

従って、

$$s = S = 0 = \int_0^1 f(x) dx$$





任意の分割を考えたので、
次のような事実の証明が簡明になった

$a < c < b$ とし、

区間 $[a, b]$ に於ける下積分を $s(a, b)$ と書くと、

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

従って、

f が 区間 $[a, c], [c, b]$ で積分可能
 $\implies f$ は区間 $[a, b]$ でも積分可能で、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Riemann 和による積分の定義

定積分の定式化には、

次のような **Riemann 和** を用いることも多い：

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$: 区間の分割

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$: 各小区間 ($i = 1, \dots, n$)

$|I_i| := x_i - x_{i-1}$: 区間幅

$\Xi = (\xi_i)_{i=1}^n$: 各小区間から点 $\xi_i \in I_i$ を選ぶ

Δ, Ξ に対し、

$$I(\Delta, \Xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |I_i| : \text{Riemann 和}$$

Riemann 和による積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$: 区間の分割

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$: 各小区間 ($i = 1, \dots, n$)

$|I_i| := x_i - x_{i-1}$: 区間幅

$\delta(\Delta) := \max_i |I_i|$: 分割の最大幅

$\Xi = (\xi_i)_{i=1}^n$: 各小区間から点 $\xi_i \in I_i$ を選ぶ

極限 $\lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi)$ が存在するとき、

$$\int_I f(x) dx := \lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi)$$

Riemann 和による積分の定義

$\lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi)$ って何？

「 $\delta(\Delta) \rightarrow 0$ で $I(\Delta, \Xi) \rightarrow I$ 」

$\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (\Delta, \Xi) :$
 $\delta(\Delta) < \delta \implies |I(\Delta, \Xi) - I| < \varepsilon$

Riemann 和による積分の定義

Riemann 和 $\lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi)$ による積分の定義は、
上積分・下積分による定義と一致：

$$s = S \iff \exists \lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi)$$

このとき、

$$s = S = \lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi)$$

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

定理 (連続関数の積分可能性):

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続
(このとき自動的に有界)



f : I に於いて積分可能

注:

「 f : 閉区間 I で連続 $\implies I$ で有界」には、
実数の基本性質 (実数の連続性) が効いている

本授業ではそこまでは立ち戻らず、
これを認めて議論を進めることとする

$s(x, y)$: 区間 $[x, y]$ に於ける下積分

特に、 $s(x) := s(a, x)$ と書くとき

主張 :

$s(x) : [a, b]$ で微分可能で、
 $s'(x) = f(x)$

即ち、

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall h :$

$$0 < |h| < \delta \implies \left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

定理 :

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続
(このとき自動的に有界)



f : I に於いて積分可能

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t) dt$$

(上端 x の関数で、**定積分関数**と呼ぶ)
が f の**原始関数**になっていることが判る

微分積分学の基本定理

f : 閉区間 $I = [a, b]$ で連続のとき

- $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

即ち、 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおくと、

F は f の原始関数 (の一つ)

- F を f の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

尚、下端 a を取り替えても、

定積分関数は定数の差しかない：

$$\int_a^x f(t) dt - \int_{a'}^x f(t) dt = \int_a^{a'} f(t) dt$$

その差を気にしない（下端を指定しない）とき、

単に

$$\int f(x) dx$$

と書き、

f の不定積分 (**indefinite integral**) と呼ぶ

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
(微分したら同じ)なので、
普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理

f : 連続のとき、不定積分 \equiv 原始関数

- 原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる
- 計算は今までに馴染みの
諸公式・手法によれば良い

ところで、前に見た $\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ で、

$x = 1$ とすれば $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ だから、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだが、

区間端点 1 では被積分関数が定義され**ない**!!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 1-0)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

と考えたいが、

- 積分区間が半開区間 $I = [0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$
- しかもそこで被積分関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ が非有界

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

→ 広義積分・変格積分 (**improper integral**)

広義積分・変格積分 (improper integral)

- 区間が有界で、端点で関数が非有界

例：
$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

- 区間が非有界（無限区間）

例：
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

→ 共に、収束・発散の判定が重要

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

$f : [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ で定義され、
 $x = b$ の近くで非有界だが、
任意の (どんな小さい) $\varepsilon > 0$ に対しても、
 $[a, b - \varepsilon] = \{x \mid a \leq x \leq b - \varepsilon\}$ で
有界かつ積分可能

とすると、各 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が定義される

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が存在するとき、

f は $[a, b)$ で**広義積分可能**と言い、

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

と書く（広義積分が収束するとも言う）

区間が非有界（無限区間）な場合

$f : [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$ で定義され、
任意の（どんな大きい） $M > a$ に対しても、
 $[a, M] = \{x \mid a \leq x \leq M\}$ で
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x) dx$$

が定義される

区間が非有界（無限区間）な場合

この状況で、

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

が存在するとき、

f は $[a, +\infty)$ で**広義積分可能**と言い、

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

と書く（広義積分が収束するとも言う）