## 主なレポート課題の例（および講義内容の補足）

**問 1.** 授業の 1 回目に紹介した「思い浮かべた 3 桁の数を 2 つ並べて 6 桁の数を作り、それが 7 で割れれば $\cdots$」という小遊びの別バージョンを作れ。（数学的に別なものでも、別の演出でも良い。）

**問 2.** 中国の数学書「孫子算経」や日本の江戸時代の数学書である吉田光由「塵劫記」に、現在「中国式剰余定理 (Chinese Remainder Theorem)」と呼ばれる定理に相当する問題とその解法が掲載されている。これを調べ、その解法を現代の数学の言葉で説明せよ。

**問 3.** 2 整数 $a, b \in \boldsymbol{Z}$ に対し、その最大公約数 $d := \gcd(a, b)$ を求める Euclid の互除法、および、それと同時に $ax + by = d$ となる整数 $x, y \in \boldsymbol{Z}$ を求める拡張互除法についてまとめよ。また、（心得のある人は）何らかの計算機言語（表ソフトのマクロなどでも良い）で実装せよ。

**問 4.** 合同式の理論は、次のように “剰余類のなす世界” $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ を構成することによって、明快に論ずることが出来る。1 以上の整数 $m$ を一つ取って固定し、整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ 上の関係 $\sim$ を次で定める：

$$a \sim b \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \exists t \in \boldsymbol{Z} : a - b = mt.$$

(1) $\sim$ が $\boldsymbol{Z}$ 上の同値関係であることを示せ。$a \in \boldsymbol{Z}$ の属する同値類（剰余類とも言う）を $\overline{a}$ と書こう。$\overline{a}$ は具体的にはどのような集合か。この関係 $\sim$ による商集合を $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ と書く。
(2) $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ の加法を $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$ で定めると well-defined であることを示せ。
(3) $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ の乗法を $\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$ で定めると well-defined であることを示せ。
(4) $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ の加法・乗法に関する結合律・可換律・分配律を示せ。
(5) $\overline{a} \in \boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ に対し、乗法に関する逆元（$\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{1}$ となる元）が存在する条件は？

**問 5.** （Fermat の小定理）$p$ を素数とする。$p$ と互いに素な整数 $a$ に対し、

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \qquad (a^p \equiv a \pmod{p} \text{ と言っても同じ})$$

が成り立つ。これを次の 2 つの方法で示せ。

(1) （加法的方法）二項定理により $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ を示し、帰納法を用いる。
(2) （乗法的方法）$x = 1, \ldots, p - 1$ に対して、$ax \bmod p$ が全て異なり 1 回づつ現れることから、$(p - 1)!$ を 2 通りに計算して比較する。

**問 6.** 秘密分散の数理技術において、授業で紹介した 2 人が協力すれば秘密を復元できる方法についてまとめると共に、$k > 2$ に対し、 $k$ 人が協力すれば秘密を復元できる方法を構成せよ。

**問 7.** （本問は Mathematica などの計算代数ソフトウェアを用いると良い。）
$N = 2047757$, $e = 3617$ とし、自分の学生番号の先頭のアルファベットを除いた 7 桁の数字で出来る自然数を $P$ とする。

(1) $N$ を法、$e$ を暗号化鍵（公開鍵）として、RSA 暗号で $P$ を暗号化し、暗号文 $C$ を求めよ。
(2) $N$ を素因数分解して、これから復号鍵（秘密鍵）$d$ を求めよ。
(3) 求めた復号鍵 $d$ を用いて、暗号文 $C$ から平文 $P$ を復元せよ。

**問 8.** 暗号・符号など、数理が利用されている実用技術について調べて述べよ。

**問 9.** 大きな素数を探す候補として、しばしば次のような数が考察される。自然数 $n$ に対し、$F_n := 2^{2^n} + 1$ を **Fermat 数**と呼ぶ。

(1) 自然数 $m$ が奇数ならば、多項式 $X^m + 1$ は整数係数の範囲で既約でない（因数分解される）ことを示せ。
(2) 自然数 $m$ に対し、$2^m + 1$ が素数ならば、$m = 2^n$ の形（即ち $2^m + 1 = 2^{2^n} + 1$ が Fermat 数）であることを示せ。
(3) $n \leq 4$ のときは $F_n$ は素数であるが、$F_5$ は素数でない。
(4) 異なる $n$ に対する Fermat 数は、どの 2 つも互いに素であることを示せ。
(5) $F_n$ の素数判定・素因数分解の研究や計算の現状について調べよ。

**問 10.** 素数 $p$ に対し、$M_p := 2^p - 1$ を **Mersenne 数**と呼ぶ。

(1) 自然数 $m$ に対し、多項式 $X^m - 1$ は $X - 1$ で割り切れることを示せ。
(2) 自然数 $m$ に対し、$2^m - 1$ が素数ならば、$m$ が素数（即ち $2^m - 1$ が Mersenne 数）であることを示せ。
(3) 小さい素数 $p$ については $M_p$ が素数であることも多いが、$M_p$ が素数でないこともある。両方の例を挙げよ。
(4) $M_p$ の素数判定・素因数分解の研究や計算の現状について調べよ。

**問 11.** $D$ を平方数でない正整数とする。

(1) 色々な $D$ に対し、$\sqrt{D}$ の（正則）連分数展開（の循環節）を求めよ。
(2) $D = n^2 + 1, n^2 + 2$ $(n \in \boldsymbol{N})$ の場合には規則性が見られる。それを観察して予想を立て（出来れば証明せ）よ。
(3) 他にも規則性の見られる場合があるか。観察・予想・証明せよ。
(4) 循環節が特に長くなるような $D$ を見付けよ。

**問 12.** 前問の状況で、$\sqrt{D}$ の連分数展開を途中で打切って得られる分数（$\sqrt{D}$ の近似分数という）を $p/q$ とする。

(1) $\sqrt{D} \fallingdotseq p/q$ であるので、$p^2 - Dq^2$ は小さい整数になると考えられる。各 $D$ に対し、幾つかの近似分数 $p/q$ について $p^2 - Dq^2$ を計算せよ。何か規則性はないか。
(2) 特に $p^2 - Dq^2 = \pm 1$ となる $p, q$ を見付けることが出来るか。

**問 13.** 方程式の代数解法（係数から四則演算と冪根とを有限回用いて解を表す公式）の探求について、数学的・歴史的なことを含めて調べて述べよ。

**問 14.** $n$ 次多項式 $f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$ に対し、その根を（重複度を込めて）$w_1, \ldots, w_n$ とする。根の差積の平方

$$D(f) := \prod_{1 \le i < j \le n} (w_i - w_j)^2$$

を $f$ の**判別式 (discriminant)** という。

(1) 根 $w_1, \ldots, w_n$ を用いた $f$ の因数分解を考えることにより、$n$ 次多項式の根と係数の関係を求めよ。特に 3 次多項式 $f(X) = X^3 + pX + q$ の場合はどうなるか。
(2) 判別式 $D(f)$ は根の対称式であるので、基本対称式で表して根と係数の関係を用いることにより、$f$ の係数で表せる。$f(X) = X^3 + pX + q$ の場合に $D(f)$ を具体的に $p, q$ で表せ。
(3) Fontana-Cardano の公式の 3 乗根の中に現れる平方根の中身と $D(f)$ とを比べよ。

**問 15.** 上問の結果より、実数を係数とする 3 次方程式が 3 つの実数解を持つとき、その解の公式には負数の平方根が必ず現れる。これを「不還元の場合 (Casus Irreducibilis)」と呼び、これが歴史上で複素数（虚数）を扱った（扱わざるを得なかった）最初と言われている。このことを含めて、複素数に関して数学的・歴史的なことを含めて調べて述べよ。

**問 16.** 4 次多項式 $f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$ の根を $w_1, \ldots, w_4$ とし、

$$t_1 := w_1 w_4 + w_2 w_3, \qquad t_2 := w_1 w_3 + w_2 w_4, \qquad t_3 := w_1 w_2 + w_3 w_4$$

とおく。

(1) $t_1, t_2, t_3$ を根とする 3 次多項式 $g(T)$ を作り、その係数を $f$ の係数 $p, q, r$ で表せ。
(2) Ferrari の解法で現れる $f$ の 3 次分解式と、上の $g(T)$ とを比べよ。

**問 17.** $n$ を正整数とし、不定方程式 $x^2 + y^2 = n$ を考える。

(1) 小さい $n$ に対し、整数解 $(x, y)$ が存在するかどうか調べよ。存在する場合・しない場合にどのような規則性があるか。
(2) 整数解 $(x, y)$ が存在する場合に、それを利用して、$x^2 + y^2 = n$ の有理数解を全て求めよ。

**問 18.** 上問と同様のことを、不定方程式 $x^2 + 2y^2 = n$ について考察するとどうなるか。また、$x^2 + Dy^2 = n$（$D \in \boldsymbol{N}, D > 0$）で、$D$ をいろいろ変えて考えてみよ。

**問 19.** 平方数で割り切れない整数を square-free（平方無縁）という。$D$ を square-free な自然数とし、$a+b\sqrt{-D}$ $(a,b\in \boldsymbol{Z})$ の形の複素数全体

$$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}] := \{a+b\sqrt{-D} | a,b\in \boldsymbol{Z}\}$$

を考える。

(1) $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ に属す数同士の和・差・積は再び $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ に属す（和・差・積で閉じているという）ことを示せ。($\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ が**環 (ring)** を成すという。)

(2) $\alpha = a+b\sqrt{-D} \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ に対し、その複素共役 $\overline{\alpha} := a-b\sqrt{-D}$ を考えると、$\overline{\alpha}+\overline{\beta} = \overline{\alpha+\beta},\ \overline{\alpha}\overline{\beta} = \overline{\alpha\beta}$ が成り立つことを示せ。

(3) $N(\alpha) := \alpha\overline{\alpha}$（$\alpha$ のノルムという）と置くと、$N(\alpha)\in \boldsymbol{Z}$ であり、$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ が成り立つことを示せ。

(4) $-D \equiv 1 \pmod 4$ の時は、実は、$\sqrt{-D}$ の代わりに $\omega := \dfrac{-1+\sqrt{-D}}{2}$ を考えて、$\boldsymbol{Z}[\omega] := \{a+b\omega | a,b\in \boldsymbol{Z}\}$ を考えた方が良い。$\omega$ を根とする整数係数の 2 次多項式 $f(X)\in \boldsymbol{Z}[X]$ を求めよ。また、$\boldsymbol{Z}[\omega]$ が和・差・積で閉じていることを示せ。

**問 20.** $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ において、$\boldsymbol{Z}$ の時と同様に、$\alpha = \beta\gamma$ となる $\gamma\in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ が存在するとき、$\alpha$ が $\beta$ で割り切れる（$\alpha$ が $\beta$ の倍数、$\beta$ が $\alpha$ の約数）といい、$\beta|\alpha$ と書く。

(1) $a,b\in \boldsymbol{Z}$ に対して、$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ での意味で $b|a$ であることと、$\boldsymbol{Z}$ での意味で $b|a$ であることとは同値。

(2) $\beta|\alpha$ ならば、$N(\beta)|N(\alpha)$.

(3) $\varepsilon\in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ に対し、$\varepsilon|1$ となることと $N(\varepsilon) = \pm 1$ となることとは同値。（このような 1 の約数を単数という。約数・倍数を考えるときは単数倍の違いは区別できない（のでしない）。）

(4) $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ の単数は、$D=1$ のとき $\varepsilon = \pm 1, \pm\sqrt{-1}$ で、それ以外は $\varepsilon = \pm 1$ に限る。（$D=3$ のとき、$\boldsymbol{Z}[\omega]$ で考えていれば、$\varepsilon = \pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2$ の可能性もある。）

**問 21.** $D$ を square-free な正整数とし、$a+b\sqrt{D}$ $(a,b\in \boldsymbol{Z})$ の形の実数全体

$$\boldsymbol{Z}[\sqrt{D}] := \{a+b\sqrt{D} | a,b\in \boldsymbol{Z}\}$$

について同様なことを考える。このとき一般に、$\varepsilon|1$ となる $\varepsilon\in \boldsymbol{Z}[\sqrt{D}]$ は無限個存在する（ので、数論がいろいろ難しくなる）。$D = 2,3,5,6,7,\ldots$ に対し、そのような $\varepsilon$ を見出せ。$D = 61, 199$ などではどうか。（見付けるのに $\sqrt{D}$ の連分数展開が利用できる。）

**問 22.** $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ において、素数・既約数を次で定義する。単数でも 0 でもない $\pi\in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ について、

- $\pi$ が $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ の既約数 $\overset{\leftarrow}{\iff} (\pi = \alpha\beta \Longrightarrow (\pi|\alpha \text{ または } \pi|\beta))$
- $\pi$ が $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ の素数 $\overset{\leftarrow}{\iff} (\pi|\alpha\beta \Longrightarrow (\pi|\alpha \text{ または } \pi|\beta))$

（$\pi$ は $p$ に対応するギリシャ文字だから使ったが、勿論ここでは円周率ではない。）

(1) 素数は既約数でもある。

(2) $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ に属す数は、単数でも 0 でもなければ、既約数の積に分解できる。（ヒント：$N(\alpha)$ に関する帰納法）

(3) $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ に属す数が素数の積に分解できるならば、その分解は掛ける順番と各素因数の単数倍の違いを除いて一意的である。（ヒント：上の定義にある素数の性質があれば、$\boldsymbol{Z}$ での時と全く同様に証明できる。）

(4) 従って、$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ において既約数が必ず素数であれば、$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-D}]$ に属す 0 でない数は、素数の（0 個以上の）積に分解でき、その分解は掛ける順番と各素因数の単数倍の違いを除いて一意的である。

(5) $D=5$ のとき、$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-5}]$ 内で、6 は $6 = 2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ と分解される。この時、各因数 $2, 3, 1\pm\sqrt{-5}$ は $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-5}]$ の既約数であり、どれも互いに単数倍ではない。従って、既約数への分解の一意性は成立しない。（特に、$2, 3, 1\pm\sqrt{-5}$ は $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-5}]$ の素数ではない。）

(6) $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-5}]$ 内で、他に既約数の積に 2 通りに分解される例を見付けよ。（$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-6}]$ などでも同様の現象が起きるので、そこでの例でも可。）

**問 23.** 特に $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ を **Gauss の整数環**という。$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ では $\boldsymbol{Z}$ と類似の互除法が出来ることから、素因数分解の一意可能性が成立する。これを以下の順を追って示そう。

(1) $\xi \in \boldsymbol{C}$ に対し、$N(\xi - \gamma) < 1$ となる $\gamma \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ が存在することを示せ。（ヒント：$\xi = x + y\sqrt{-1} \in \boldsymbol{C}$ を平面の点 $(x, y)$ に対応させるとき（複素数平面・Gauss 平面などという）、$N(\xi) = x^2 + y^2$ は原点から $(x, y)$ までの距離の平方である。）

(2) 任意の $\alpha, \beta \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}], \beta \neq 0$ に対して、$\alpha = \beta\gamma + \delta, N(\delta) < N(\beta)$ となる $\gamma, \delta$ が存在することを示せ。（ヒント：$\xi = \alpha/\beta$ について前問を適用せよ。これさえあれば以下の議論は $\boldsymbol{Z}$ の場合と殆ど同様に出来る。）

(3) $\alpha, \beta$ の公約数 $\delta$ で、$\xi, \eta \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ を用いて $\alpha\xi + \beta\eta = \delta$ と書けるものが存在する。（ヒント：前小問により、余りのノルムに関する互除法が有限回で止まる。最後に割切れたときの余り $\delta$ がこの性質を持つことが言える。）

(4) 任意の $\alpha, \beta \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ に対して、次を満たす $\delta \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ が存在することを示せ。
- $\delta | \alpha, \delta | \beta$
- $\delta' | \alpha, \delta' | \beta \Longrightarrow \delta' | \delta$

このような $\delta$ は単数倍の違いを除いて一意的である。（その違いを気にせずに）$\delta = \gcd(\alpha, \beta)$ と書いて、$\alpha, \beta$ の最大公約数と呼ぶ。（ヒント：前小問の $\delta$ がこの性質を満たす。）

(5) $\gcd(\alpha, \beta) = 1$ のとき、$\alpha, \beta$ は互いに素であるという。このとき、$\alpha | \beta\gamma \Longrightarrow \alpha | \gamma$.

(6) $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ では、既約数は素数でもある。（ヒント：$\pi$ が既約数のとき、$\pi | \alpha$ でなければ $\pi, \alpha$ が互いに素であることを示す。）

(7) これより、$\boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}]$ では素因数分解の一意可能性が成立する。

**問 24.** $\omega := \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ とおき、$\boldsymbol{Z}[\omega]$ を **Eisenstein の整数環**という。これについても前問と同様なことを論ぜよ。

**問 25.** 整数 $a \in \boldsymbol{Z}$ に対し、その相異なる素因数全ての積を $\mathrm{rad}(a)$ と書き、$a$ の**根基 (radical)** という：

$$\mathrm{rad}(a) := \prod_{p|a} p$$

$a$ の根基 $\mathrm{rad}(a)$ は、或る $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $a | r^n$ となるような自然数 $r$ のうち最小のものである。

**問 26.** $a + b = c$ を満たす互いに素な正整数の組 $(a, b, c)$ を $abc$-triple と呼ぼう。$abc$ **予想**とは、$abc$-triple に対する次の命題のことである：

- 任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対し、或る正の実数 $K = K_\varepsilon > 0$ が存在し、任意の $abc$-triple $(a, b, c)$ に対して

$$c < K\mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

これは次の命題と同値である：

- 任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対し、$c \geq \mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$ となる $abc$-triple $(a, b, c)$ は有限個。

**問 27.** $abc$ 予想が正しければ、次を満たす正整数 $N$ が存在する：

- 任意の $abc$-triple $(a, b, c)$ に対して $c < \mathrm{rad}(abc)^N$

このとき、$n \geq 3N$ となる整数 $n$ に対して、次の Fermat 予想の指数 $n$ の場合が従う。

- $X^n + Y^n = Z^n$ は $XYZ \neq 0$ であるような整数解を持たない。

**問 28.** $abc$-triple $(a, b, c)$ が $abc$ 予想の不等式の限界に如何に “肉薄” しているか、を示す指標として、quality と呼ばれる次の値を導入する：

$$q = q(a, b, c) := \frac{\log(c)}{\log \mathrm{rad}(abc)}.$$

このとき、$abc$ 予想は次のように言い換えられる：

- 任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対し、$q(a, b, c) > 1 + \varepsilon$ となる $abc$-triple $(a, b, c)$ は有限個。

以下の問題は、大きい quality の値を持つ $abc$-triple の探索の例である。

**問 29.** $r$ を正整数とするとき、$(a,b,c)=(1,3^{2^r}-1,3^{2^r})$ とすると、$q(a,b,c)>1$ となる。（ヒント：$X^2-1=(X-1)(X+1)$ を用いて $b$ を繰返し分解すると、各因子が 2 で割れるので、$b$ が 2 で多数回割れる。このことから、$\mathrm{rad}(b)$ が上から押さえられる。）この例は、quality が 1 より大きい $abc$-triple が無限個存在すること、即ち、$\varepsilon=0$ では予想が成り立たないことを示している。

**問 30.** 上問で 3 の代わりに奇数 $5,7,11,13,15,17,\dots$ を用いたらどうか。また、不等式の限界に “肉薄” している度合いを比較せよ。

**問 31.** 方程式 $X^2+Y^2=Z^2$ の整数解 $(X,Y,Z)$ を用いて $(a,b,c)=(X^2,Y^2,Z^2)$ とすると、$\mathrm{rad}(abc)=\mathrm{rad}(XYZ)=\sqrt{abc}$ となってそこそこ小さい。さらに、整数解の明示式 $(X,Y,Z)=(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$ を利用して、$\mathrm{rad}(XYZ)$ が小さくなるように $m,n$ を選ぶことで、$q(a,b,c)>1$ となる $abc$-triple の例が得られることが期待される。そのような例をいろいろ見つけよ。

**問 32.** 平方因子を持たない正整数 $N$ について、$\sqrt{N}$ の連分数展開の近似分数を $s_n/t_n$ として、$s_n^2-Nt_n^2=C$ とおくと、$C$ は $n$ に関して有界、即ち、或る（$N$ には依るが $n$ に依らない）定数 $B$ が存在して $|C|\le B$ となる。（特に $C=\pm1$ となるような $n$ が無限に（周期的に）現れる。問 11,12,21 参照。）記述の簡単のため、$C>0$ かつ $\gcd(N,s_n)=1$ とすると、このとき、$(a,b,c)=(C,Nt_n^2,s_n^2)$ は $abc$-triple で、$t_n<s_n/\sqrt{N}$ であることから、

$$\mathrm{rad}(abc)\le CN\mathrm{rad}(s_n)\mathrm{rad}(t_n)\le BNs_nt_n<B\sqrt{N}c$$

となり、$\varepsilon=0$ のときの不等式に定数 $B\sqrt{N}$ 倍程度まで肉薄する。（$C<0$ でも同様。$d:=\gcd(N,s_n)>1$ の場合には $d$ で割ったものを考える。）一般にはここまでだが、$s_n,t_n$ が “偶々” 平方因子（やさらに高い冪の因子）を持つときは、$\mathrm{rad}(s_n),\mathrm{rad}(t_n)$ が小さくなって、$q(a,b,c)>1$ となることが期待される。そのような例をいろいろ見つけよ。

**問 33.** 正整数 $N,r$ について、$N$ の $r$ 乗根 $\sqrt[r]{N}$ の連分数展開の近似分数を $s_n/t_n$ とし、$s_n^r-Nt_n^r=C$ とおいて $abc$-triple $(a,b,c)$ を作ると、ほぼ、

$$\mathrm{rad}(abc)\le CN\mathrm{rad}(s_n)\mathrm{rad}(t_n)\le CNs_nt_n<CN^{1-\frac{1}{r}}c^{\frac{2}{r}}$$

となり、$r\ge3$ のとき $abc$ 予想に抵触する例を生み出すように見えるが、実は $r=2$ のときと異なり、$r\ge3$ のときは $C$ が $n$ につれて大きくなるので、直ちに反例となるわけではない。しかしながら、“偶々” $C$ の値が小さくなるときには、$q(a,b,c)$ が大きい $abc$-triple $(a,b,c)$ が見つかると期待される。そのような例をいろいろ見つけよ。（$\sqrt[r]{N}$ の連分数展開は近似値を用いて求めることになるだろう。現在見つかっている $q(a,b,c)$ が大きい $abc$-triple $(a,b,c)$ の中にも、このようにして見つけられたと思われるものは多い。）

---

**レポート提出について**

- 締切：**2020 年 1 月 31 日 (金)20 時頃**まで
- 内容：配布プリントのレポート課題の例のような内容、及び授業に関連する内容で、授業内容の理解または発展的な取組みをアピールできるようなもの
- 分量：プリントのレポート課題を全部提出する必要はなく、問題の重さによって適宜判断して 1〜数問取り組めば良い。内容に関しては、このプリントの例に必ずしも拘らず、意欲的な取組みを望む。探求的な内容も歓迎する。
- 提出先：情報理工学科事務室（4-396 室）前のレポート提出箱。授業最終回の授業終了後に提出しても良い。電子メイル（`tsuno-h@sophia.ac.jp` 宛）で提出しても良い。電子メイルで提出の場合は、原則として、**情報システム室（メディアセンター）の自分のアカウント**から送ること。
- 注意：参考にした文献があれば、その題名・著者などを記すこと。インターネット上の情報であれば、サイト名・文章題目・URL などを記すこと。但し、単なる文章の引き写しではなく、自分で理解した言葉でまとめること。歴史・応用などを調べる課題でも、数学的な内容について出来る限り自分でフォローして、その内容を含めること。他の受講者と共同で取り組んだ問題があれば、学生番号・氏名を記すこと。