$\boxed{\mathbf{4}}$ 平方数でない自然数 $N = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots$ などについて、$\sqrt{N}$ の正則連分数展開 $\sqrt{N} = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ を循環するまで求めよ。また、連分数展開を用いて得られる $\sqrt{N}$ の各段階の近似分数 $[a_0, a_1, \ldots, a_i] = p_i/q_i$ を（直接、または漸化式

$$\begin{cases} p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0, \quad p_i = p_{i-1}a_i + p_{i_2} \\ q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad q_i = q_{i-1}a_i + q_{i_2} \end{cases} \qquad (i \geq 1)$$

によって）求め、それに対し、p_i/q_i の小数による近似値、および $p_i^2 - Nq_i^2$ を計算せよ。
（$N = 5, 6, 7, \ldots$ は裏へ、足りなければ別紙を付けて）
（注：各 p_i/q_i は $\sqrt{N}$ に近いので、$|p_i^2 - Nq_i^2|$ は小さい値になると期待される。特に、$p_i^2 - Nq_i^2 = \pm 1$ となるのはどの段階か。）

- $N = 2$

$$\sqrt{2} = \boxed{} + (\sqrt{2} - \boxed{})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \boxed{}} =$$

i	a_i	p_i	q_i	p_i/q_i(小数で)	$p_n^2 - 2q_n^2$
-1	$--$	1	0	$---$	1
0			1		
1					
2					
3					
4					

- $N = 3$

$$\sqrt{3} = \boxed{} + (\sqrt{3} - \boxed{})$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \boxed{}} =$$

i	a_i	p_i	q_i	p_i/q_i(小数で)	$p_n^2 - 3q_n^2$
-1	$--$	1	0	$---$	1
0			1		
1					
2					
3					
4					