2020年度春期　　**数学演習 I**［情報理工学科クラス］

演習課題（第１回：05/25）　　　　微分積分演習担当：角皆（つのがい）

本科目では、主に隔週で講義「数学 AI（線型代数）」「数学 BI（微分積分）」の内容、また、一部は両科目の枠に拘らず融合的に数学の学修の基礎となる内容の、理解を深める演習を行なう。このうち、微分積分演習および融合演習を担当する。両担当者で授業の進め方が若干異なる可能性があるので、その回の担当者の指示に従うこと。

答案（の文字および内容）を整理して適切に清書する練習を兼ねて、問題は一旦各自のノートに解き、提出分の問題については清書して提出することを奨める。次の回以降に補足解説をすることがあるが、その際は各自で自分が解いたノートの答案を参照せよ。

授業時には、まず例題について解説する。その後、他の問題に取り組むこと。授業終了時の提出課題は * を付けた問題を基本（必須）として、興味と意欲があれば、他の問題にも取組み、1〜2 問程度を追加で提出せよ。

演習時間中に質問があれば、ミュート解除して声を掛けるか、チャットを送られたい。出来るだけ対応して補足解説をする予定である。事前に moodle のフォーラムで質問すること、また、質問以外の問題提起・話題提供も歓迎・推奨する。

1. 不等式による評価・ε-δ 流の極限の定式化 (05/28)

例題 1-1　α, β を定数とする。$|x-\alpha| < \varepsilon, |y-\beta| < \varepsilon$ のとき、$|(x+y)-(\alpha+\beta)|$ および $|(x-y)-(\alpha-\beta)|$ を、ε を用いて上から評価せよ。

問 1-1*.　α, β を定数とする。$|x-\alpha| < \varepsilon, |y-\beta| < \varepsilon$ のとき、$|xy-\alpha\beta|$ を、$\alpha, \beta, \varepsilon$ を用いて上から評価せよ。ただし、ε が 0 に近付くとき、この上界も 0 に近付くようにせよ。

例題 1-2　関数の収束の ε-δ 流の定義について、関数 f について、

(1) 「x が a に近付くとき $f(x)$ が α に収束する」すなわち「$x \longrightarrow a$ で $f(x) \longrightarrow \alpha$」ということを、論理記号を交えて記述せよ。

(2) 上の否定命題、すなわち「『$x \longrightarrow a$ で $f(x) \longrightarrow \alpha$ 』でない」ということを、論理記号を交えて記述せよ。

問 1-2*.　関数の連続性の ε-δ 流の定義について、

(1) 「関数 f が $x=a$ で連続である」ということを、論理記号を交えて記述せよ。

(2) 「関数 f が $x=a$ で連続でない」ということを、論理記号を交えて記述せよ。

例題 1-3　$x \neq 0$ に対して $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ で定義される関数 f について、$x \longrightarrow 0$ のとき $f(x) \longrightarrow 0$ ではないことを示せ。（もっと言うと、どんな実数 a に対しても、$x \longrightarrow 0$ のとき $f(x) \longrightarrow a$ ではない（つまり f は $x \longrightarrow 0$ でいかなる値にも収束しない）。こちらを示しても良い。）

問 1-3*.　実数 $x \in \boldsymbol{R}$ に対し、x を超えない最大の整数を $[x], \lfloor x \rfloor$ 等と書き、x の整数部分 (integer part) と呼ぶ：

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \boldsymbol{Z} \mid n \leq x\} \ .$$

これで定まる関数 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ について、整数 $n \in \boldsymbol{Z}$ に対し、f が $x = n$ で連続でないことを示せ。

問 1-4.　$x \neq 0$ に対して $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ で定義される関数 f について、$x \longrightarrow 0$ のとき $f(x) \longrightarrow 0$ (即ち $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$) であることを証明せよ。

例題 1-4　（極限の一意性）関数 f が $x \longrightarrow a$ で $f(x) \longrightarrow \alpha$ かつ $f(x) \longrightarrow \beta$ ならば、$\alpha = \beta$ であることを示せ。（従って、f の $x \longrightarrow a$ での極限値が存在すれば一意であり、この一意に定まる値を $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a} f(x)$ と書く。）

例題 1-5　$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{x\to a} g(x) = c$ のとき、$\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b+c$ となることを示せ。

問 1-5*.　前問の状況で、$\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = b - c$ となることを示せ。

問 1-6.　前問の状況で、$\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = bc$ となることを示せ。

問 1-7.　自然数 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して、関数 $f(x) = x^n$ が、任意の実数 a に対して $x = a$ で連続であることを示せ。（ヒント：直接に二項定理で展開して三角不等式で処理しても良いし、前問を使って帰納法で示しても良い。自然数 n に対する x^n の定義がそもそも

$$x^n := \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ x^{n-1} \cdot x & (n \geq 1) \end{cases}$$

だと考えれば、それに沿って帰納法で示すのはむしろ自然で、こちらの方が定義通りの証明と言えるのかも。）

問 1-8.　多項式 $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_n x^n = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ で定まる関数 $f(x) = P(x)$ が、任意の実数 a に対して $x = a$ で連続であることを示せ。

例題 1-6　$x \neq 0$ なる実数に対して定義される関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ が、任意の実数 $a \neq 0$ に対して $x = a$ で連続であることを示せ。

問 1-9.　関数 f が $x = a$ で連続で、かつ $f(a) \neq 0$ であるとする。

(1) 或る $\varepsilon > 0$ と $c > 0$ とが存在して、$|x - a| < \varepsilon$ のとき $|f(x)| > c > 0$ となることを示せ。（簡単のために $f(a) > 0$ として考えても良い。このときは、$f(x) > c > 0$ を示すことになる。）

(2) $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(a)}$ （即ち、$\dfrac{1}{f(x)}$ も $x = a$ で連続）となることを示せ。（ヒント：評価の中で前小問を用いる。）

例題 1-7　関数 f が $x = a$ で微分可能なら、$x = a$ で連続であることを示せ。

問 1-10.　関数 f が $x = a$ で微分可能で、$f'(a) > 0$ のとき、或る $\delta > 0$ が存在して、$a < x < a + \delta$ ならば $f(x) > f(a)$、および $a - \delta < x < a$ ならば $f(x) < f(a)$ となる（$x = a$ で増加の状態にある）ことを示せ。

問 1-11.　次で定義される関数 f は $x = 0$ で（も）連続である（問 1 参照）：

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

f が $x = 0$ で微分不可能であることを示せ。

問 1-12.　次で定義される関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

について、$x = 0$ で（連続であり、かつ）微分可能であることを示せ。