2020年度春期

数学演習 I ［情報理工学科クラス］

微分積分演習担当：角皆（つのがい）

今年度は特殊事情により授業回数を圧縮して実施するため、授業時には内容を絞り込んで行わざるを得ない。そこで、復習・補足・充実・発展的な内容を補足演習として、シリーズ化して提供するので、各自で取り組まれたい。質問などは勿論歓迎する。

0. 微分・積分の計算（復習）

まずは思い出しを兼ねて、高校の数学の内容（「数学 III」まで）を復習して理解を固めることを勧める。本節は事前課題として提示するため、提出は要求しないが、類似した、あるいはこれを基盤とした演習課題に取組むことになるので、今後の学修に向けて、授業開始前に取り組まれたい。

大学での学修では、（大学受験に向けてしばしば要求されたような）個別の問題解法や計算技術もさることながら、理論がどのように組み立てられ、どのようなことが明らかにできるか、というようなストーリーとして理解することが（本科目に限らず）重要である。そこでまずは、基盤となる理解を確かめて固めるため、必要なら高校の教科書を参照しながら、以下の事柄を確認せよ。

問 0–1.　次の事柄の定義を述べよ。

(1) 関数 f の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$

(2) 正の実数 a, x $(a \neq 1)$ に対する、a を底とする x の対数 $\log_a x$

問 0–2.　例えば $2^{\sqrt{2}}$ はどのように定められるか。（「2 を $\sqrt{2}$ 回掛けたもの」というのはナンセンス。）そのために、正の実数 a に対し、順次、以下のものを考えよ。

(1) 自然数 n に対する a^n の定義

(2) 整数 z （特に負の整数）に対する a^z の定義

(3) 有理数 $r = n/d$ （n, d は整数）に対する a^r の定義

(4) 実数 x に対する a^x の定義

問 0–3.　2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ の解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を導け。

問 0–4.　n 個のものから r 個選ぶ組合せの個数 ${}_nC_r$ について、より広い一般化も踏まえて $\binom{n}{r}$ と書き、二項係数と呼ぶ。

(1) 漸化式 $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ を導け。

(2) これを用いて、二項定理 $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$ を導け。

問 0–5.　自然数 n に対し、微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ を、微分の定義に従って導け。

問 0–6.　積の微分の公式 $(fg)' = f'g + fg'$ を、微分の定義に従って導け。

問 0–7.　不等式 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$ で定まる領域の面積を、区分求積法により求めよ。（言い換えると、定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ の値を区分求積法で求めよ、ということ。）

問 0–8.　三角関数の加法定理から、いわゆる「和積の公式」「積和の公式」を導け。

以下は、高校までの知識で取り組める（が、大学受験の範囲からは少し踏み出すかもしれない）内容の計算演習を提示する。

問 0–9.　関数 $f(x) = x^n e^{-x}$（n は自然数）に対し、

(1) 導関数 $f'(x)$ および 2 階の導関数 $f''(x)$ を計算せよ。
(2) $n = 0, 1, 2$ に対し、$y = f(x)$ のグラフを描け。（$x \geq 0$ の範囲のみでもよい。増減・凹凸に加え、$x \longrightarrow +\infty$ での極限にも留意せよ。）
(3) $n > 2$ に対しては、$y = f(x)$ のグラフはどのようになるか、大まかな形を描け。

問 0–10.　関数 $f(x) = x^n \log x$（n は自然数）に対し、

(1) 導関数 $f'(x)$ および 2 階の導関数 $f''(x)$ を計算せよ。
(2) 定積分によって定まる関数 $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ を計算せよ。（ヒント：部分積分）
(3) $n = 0, 1, 2$ に対し、$y = f(x)$ のグラフを描け。（増減・凹凸に加え、$x \longrightarrow +0$ および $x \longrightarrow +\infty$ での極限にも留意せよ。）
(4) $n > 2$ に対しては、$y = f(x)$ のグラフはどのようになるか、大まかな形を描け。

問 0–11.　自然数 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し、

$$I_n(x) := \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

とおく。

(1) $I_0(x)$ を求めよ。
(2) 部分積分により、$I_n(x)$ の満たす漸化式を求めよ。
(3) $I_1(x), I_2(x), I_3(x)$ を求めよ。
(4) $I_n(x)$ をうまく書き表してみよ。
(5) $I_n := \displaystyle\lim_{x \to +\infty} I_n(x)$ とおく。I_n の満たす漸化式を求め、I_n を求めよ。

問 0–12.　定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ の値を求めよう。

(1) I_0, I_1 を求めよ。
(2) $\sin^n x$ の導関数を求めよ。
(3) $\sin^n x = \sin x \ \sin^{n-1} x$ と見て部分積分することにより、I_n, I_{n-2} の関係式を求めよ。
(4) I_n を求めよ。

問 0–13.　関数 $f(x) = e^{-ax} \sin bx, g(x) = e^{-ax} \cos bx$ （a, b は正の実数）に対し、

(1) 導関数 $f'(x), g'(x)$ および 2 階の導関数 $f''(x), g''(x)$ を計算せよ。
(2) 正の実数 t に対し、定積分

$$I(t) := \int_0^t f(x) \, dx, \qquad J(t) := \int_0^t g(x) \, dx$$

を求めよ。
(3) $t \longrightarrow +\infty$ での $I(t), J(t)$ の極限を求めよ。

問 0–14.　正整数 m, n に対し、

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx, \ \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx, \ \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx$$

の値を求めよ。