2021 年度春期

数学 BI（微分積分）

（情報理工学科クラス）

（担当：角皆）

理工学の大学初年級で学ぶ数学

<table>
<tr><td colspan="2">数学の分野（手法）</td><td>解析学（無限小解析）</td><td>代数学</td></tr>
<tr><td colspan="2">理工学の大学初年級では</td><td>微分積分</td><td>線型代数</td></tr>
<tr><td rowspan="3">本学理工学部 1 年次では</td><td rowspan="2">春</td><td>数学 BI（微分積分）</td><td>数学 AI（線型代数）</td></tr>
<tr><td colspan="2">数学演習 I</td></tr>
<tr><td>秋</td><td colspan="2">微分方程式の基礎
数学 BII（多変数微積）
数学 AII（線型空間論）
数学演習 II</td></tr>
<tr><td colspan="2">標語的には</td><td>不等式の数学</td><td>等式の数学</td></tr>
</table>

本講義の概要

- 不等式による評価
- 収束・極限の基礎付け（ε-δ 論法）
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から **Taylor** の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

本講義の概要

- 不等式による評価
- 収束・極限の基礎付け（ε-δ 論法）
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から **Taylor** の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式」は
高校まででは殆ど扱わない

不等式なんて高校でやったよ!!

「不等式」は
高校まででは殆ど扱わない

不等式なんて高校でやったよ !!

高校で扱った不等式

例：2 次不等式

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

を解け。

解答：

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$(x-2)(x-5) < 0$$

従って、

$$2 < x < 5 \quad \square$$

例：2 次方程式

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

を解け。

解答：

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

従って、

$$x = 2, 5 \quad \square$$

高校で扱った不等式

例：2 次不等式

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

を解け。

解答：

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$(x-2)(x-5) < 0$$

従って、

$$2 < x < 5 \quad \square$$

例：2 次方程式

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

を解け。

解答：

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

従って、

$$x = 2, 5 \quad \square$$

「不等式」と言っても、

動作は等式の扱いと同様であった

では、ここで言う

「不等式の数学」

とはどういうものか？

不等式の数学とは？

収束・発散・極限などなど、

それも

- はさみ打ちの原理
- 区分求積法
- 誤差の評価 **(estimate)**

など

不等式の数学とは？

収束・発散・極限などなど、

それも

- はさみ打ちの原理
- 区分求積法
- 誤差の評価 (**estimate**)

など

不等式の数学とは？

と言っても難しいことではない

使うことは次のような基本性質

- 順序としての性質
  （反射律・推移律・反対称律）
- 演算との関係
- 絶対値の性質（三角不等式）

大小関係・絶対値の基本性質

- 順序としての性質：
  - $\star$ 反射律：$x \leq x$
  - $\star$ 推移律：$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$
  - $\star$ 反対称律：$x \leq y,\ y \leq x \Longrightarrow x = y$

- 演算との関係：
  - $\star$ $x \leq y \Longrightarrow x + a \leq y + a$
  - $\star$ $a > 0,\ x \leq y \Longrightarrow ax \leq ay$

大小関係・絶対値の基本性質

- 絶対値の性質：
  - $\star$ $|x| \geq 0$ で、$|x| = 0 \iff x = 0$
  - $\star$ $|1| = 1,\ |-1| = 1$
  - $\star$ $|xy| = |x||y|$
  - $\star$ 三角不等式：$|x+y| \leq |x| + |y|$
    (triangle inequality)

絶対値について

実数 x に対し、

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

：x の**絶対値** (**absolute value**)

絶対値と言えば、正負の場合分け？

絶対値の本質は $\cdots$

絶対値について

実数 x に対し、

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

: x の絶対値 (**absolute value**)

絶対値と言えば、正負の場合分け？

絶対値の本質は $\cdots$

絶対値について

実数 x に対し、

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

: x の**絶対値 (absolute value)**

絶対値と言えば、正負の場合分け？

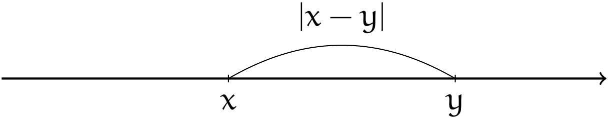
絶対値の本質は $\cdots$

絶対値について

絶対値の本質は、

隔たり（距離）を定める幾何的な概念

- $|x|$ は x の 0 からの隔たり
- $|x-y|$ は x と y との隔たり



絶対値について

三角不等式

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$$

は、距離が満たすべき重要な特徴（性質）

複素数の絶対値やベクトルの大きさも
同様な性質を持つ

例題１：不等式による誤差評価

分銅 **X** はほぼ 3 **g** で誤差 0.01 **g** 未満、

分銅 **Y** はほぼ 5 **g** で誤差 0.02 **g** 未満、

であるとする。

両方合わせるとほぼ何 **g** で誤差はどれくらいか？

例題1：不等式による誤差評価

分銅 **X** が x **g**、分銅 **Y** が y **g** であるとする。

$$|x-3| < 0.01, \qquad |y-5| < 0.02$$

合わせるとほぼ $3+5=8$ **g** であるのは良かろう。

誤差は、$|(x+y)-(3+5)|$ **g** である。

$$|(x+y)-(3+5)| < \boxed{\ ?\ }$$

誤差の

上からの評価 **(estimate)**・上界 **(upper bound)**

を与えること

例題１：不等式による誤差評価

分銅 **X** が x **g**、分銅 **Y** が y **g** であるとする。

$$|x-3| < 0.01, \qquad |y-5| < 0.02$$

合わせるとほぼ $3+5=8$ **g** であるのは良かろう。

誤差は、$|(x+y)-(3+5)|$ **g** である。

$$|(x+y)-(3+5)| < \boxed{\text{ ? }}$$

誤差の

上からの評価 **(estimate)**・上界 **(upper bound)**

を与えること

例題１：不等式による誤差評価

$$|x-3| < 0.01, \qquad |y-5| < 0.02$$

$$\begin{aligned} |(x+y)-(3+5)| &= |(x-3)+(y-5)| \\ &\leq |x-3|+|y-5| \\ &< 0.01+0.02 \\ &= 0.03 \end{aligned}$$

従って、誤差は 0.03 **g** 未満。

例題1：不等式による誤差評価

同じことだが、次のように言っても良い：

分銅 **X** が x **g**、分銅 **Y** が y **g** であるとする。

誤差がそれぞれ h **g**, k **g** とすると、

$$x = 3 + h, \qquad |h| < 0.01$$
$$y = 5 + k, \qquad |k| < 0.02$$

例題１：不等式による誤差評価

合計の誤差は、

$$
\begin{aligned}
&|(x+y)-(3+5)| \\
&= |((3+h)+(5+k))-(3+5)| \\
&= |h+k| \qquad \mathbf{g}\ \text{である。}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|h+k| &\leq |h|+|k| \\
&< 0.01+0.02 \\
&= 0.03
\end{aligned}
$$

従って、誤差は 0.03 $\mathbf{g}$ 未満。

例題 2：不等式による誤差評価

一辺の長さが大体 3 **cm** の正方形の紙がある。

従って、面積は大体

$$3^2 = 9 \text{ cm}^2$$

である。

一辺の長さの誤差が 0.1 **cm** 未満であるとする。

面積の誤差はどれくらいか？

例題 2：不等式による誤差評価

説明の簡単のため、問題を単純にして、

縦横ともに、真の一辺の長さが x **cm**、

誤差が h **cm** であるとすると、

$$x = 3 + h, \qquad |h| < 0.1$$

面積の誤差は、

$$|x^2 - 3^2| \ \mathbf{cm}^2$$

例題 2：不等式による誤差評価

$$
\begin{aligned}
|x^2 - 3^2| &= |(3+h)^2 - 3^2| \\
&= |6h + h^2| \\
&\leq |6h| + |h^2| \\
&= 6|h| + |h|^2 \\
&< 0.6 + 0.01 \\
&= 0.61
\end{aligned}
$$

従って、誤差は 0.7 $\mathbf{cm}^2$ 未満（1 $\mathbf{cm}^2$ 未満）。

例題 3：許容誤差の設計

一辺の長さが大体 3 **cm** の正方形の紙を作る。

面積は大体

$$3^2 = 9 \ \mathbf{cm}^2$$

であるが、さて、

面積の誤差が 0.1 **cm**^{2} 未満

であることを保証するためには、

一辺の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか。

例題 3：許容誤差の設計

先と同様に、説明の簡単のため問題を単純にして、

縦横ともに、真の一辺の長さを x **cm** としよう。

この時、面積の誤差は $|x^2 - 3^2|$ **cm**^{2} と表せる。

一辺の長さの誤差を h **cm** とすると、

$$x = 3 + h$$

誤差は δ cm 未満（つまり $|h| < \delta$）としよう。

例題 3：許容誤差の設計

設定：

$$x = 3 + h, \qquad |h| < \delta$$

目標：

$$x = 3 + h,\ |h| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 3^2| < 0.1$$

となる δ を見付けること

例題 3：許容誤差の設計

目標：$x = 3 + h,\ |h| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 3^2| < 0.1$
となる δ を見付けること

- δ は 1 つ見付ければ良い

- 余り小さ過ぎない方が良い
- 余りぎりぎりでなくても良い
  $\longrightarrow$ 桁くらい判れば良いだろう

- 論理的には厳密であること（$\fallingdotseq$ ではなくて）

- 誤差の限界（今は 0.1）が小さくなっても
  通用する方法が良い

例題 3：許容誤差の設計

$$x = 3 + h, \qquad |h| < \delta$$

$$\begin{aligned} |x^2 - 3^2| &= |(3+h)^2 - 3^2| \\ &= |6h + h^2| \\ &\leq 6|h| + |h|^2 \\ &< 6\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

従って、

$$6\delta + \delta^2 \leq 0.1$$

となれば良い

2 次不等式

$$6\delta + \delta^2 \leq 0.1$$

を解くのは大変だ

$\longrightarrow$ 2 次の項 δ^2 を何とか処理したい

ここで、

- 誤差の限界 δ の厳密な範囲は必要ない
- δ は 1 つ見付ければ良い
- δ が小さい所で探せば良い

$\longrightarrow$ 例えば $\delta \leq 1$ という条件付きで考えてみよう

2 次不等式

$$6\delta + \delta^2 \leq 0.1$$

を解くのは大変だ

$\longrightarrow$ 2 次の項 δ^2 を何とか処理したい

ここで、

- 誤差の限界 δ の厳密な範囲は必要ない
- δ は 1 つ見付ければ良い
- δ が小さい所で探せば良い

$\longrightarrow$ 例えば $\delta \leq 1$ という条件付きで考えてみよう

2 次不等式

$$6\delta + \delta^2 \leq 0.1$$

を解くのは大変だ

$\longrightarrow$ 2 次の項 δ^2 を何とか処理したい

ここで、

- 誤差の限界 δ の厳密な範囲は必要ない
- δ は 1 つ見付ければ良い
- δ が小さい所で探せば良い

$\longrightarrow$ 例えば $\delta \leq 1$ という条件付きで考えてみよう

そこで、

$$\delta \leq 1$$

とする。すると、

$$\begin{aligned} 6\delta + \delta^2 &\leq 6\delta + \delta \\ &= 7\delta \end{aligned}$$

であるから、

$$7\delta \leq 0.1$$

となればよい。これより、

$$\delta \leq \frac{0.1}{7} \quad (= 0.0142857\cdots)$$

となるので、$\delta \leq 0.01$ ならばよい。

これと、さっき仮定した

$$\delta \le 1$$

とを共に満たせば良いので、

$$\delta = \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

に取れる。

従って、一辺の長さの誤差は

0.01 **cm** 未満

であれば良い。

実はこの辺りの議論は多分に技術的な話なのだが、

- ごく簡単な場合を除いて、多くの場合に必要

- 不等式での評価に於ける基本的な技術

なので、馴れておく必要がある

（技術的な細かい話）

さっき $\delta \leq 1$ とした後に、

$$6\delta + \delta^2 \leq 6\delta + 1$$

とすることも出来た
（ここだけ見るなら論理的には正しい）

しかし、これだと

$$6\delta + 1 \leq 0.1$$

としなければならなくなってしまい困る

$\longrightarrow$ 目標を見定めて議論を進める必要性

（技術的な細かい話）

もう少し厳しく、

$$\delta \leq \frac{1}{10} = 0.1$$

としておけば、

$$6\delta + \delta^2 \leq 6\delta + \frac{1}{100}$$

なので、

$$6\delta + \frac{1}{100} \leq 0.1$$

であれば良い

このような δ なら取ることが出来る

（技術的な細かい話）

しかし、この論法のためには、
0.1 だったらどれくらいにすれば良いか、
かなり注意深く取っておかないと破綻する
（本末転倒）

さっきのように、$\delta \leq 1$ の下で、

$$\delta^2 \leq \delta$$

で評価しておけば、

誤差の限界が小さくなっても、
後で δ を小さくとれば対応できる

（技術的な細かい話）

勿論、より精密な限界が知りたければ／必要ならば、

- 2 次不等式 $6\delta + \delta^2 \leq 1$ を解くなり、
- もっと精密な評価をするなり、

すればよい／せねばならない

今までは、
誤差の限界が 0.1 $\mathbf{cm}^2$ に設定されていて、
その値未満に収めようとしてきたが、

この方法なら、原理的には、
どんなに厳しい（小さい）限界に対しても、
同様の議論が可能

$\longrightarrow$ 誤差の限界が 0.001 $\mathbf{cm}^2$ だったら？

$\longrightarrow$ より一般に、誤差の限界を ε $\mathbf{cm}^2$ とすると？

例題 4：許容誤差の設計

一辺の長さが大体 3 **cm** の正方形の紙がある。

従って、面積は大体

$$3^2 = 9 \text{ \textbf{cm}}^2$$

である。さて、正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

面積の誤差が ε $\textbf{cm}^2$ 未満

であることを保証するためには、

一辺の誤差をどの程度に収めれば良いか。

任意の（どんなに小さい）
正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対しても、

$$|h| < \delta \Longrightarrow |(3+h)^2 - 3^2| < \varepsilon$$

となる正の実数値 $\delta > 0$ を見付けることが
可能であった

（ε が小さければ δ も小さくしなければ
いけないけれども）

これは何をやっているかと言うと、

「h が充分 0 に近ければ、
$(3+h)^2$ は充分 9 に近い」

ということを言っている

「x が充分 3 に近ければ、
x^2 は充分 9 に近い」

と言っても良い

これが

$$\lim_{h\to 0}(3+h)^2 = 9$$

すなわち

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9$$

の実質的な意味内容なのであった !!

「x が充分 3 に近ければ、
x^2 は充分 9 に近い」

ここで重要なのは、

「x を充分 3 に近付ければ、
x^2 は充分 9 に近付く」

という言い方をしていない、ということ

「近付く」	$\longleftrightarrow$	「近い」
動的 **(dynamic)**		静的 **(static)**

「x が充分 3 に近ければ、
x^2 は充分 9 に近い」

ここで重要なのは、

「x を充分 3 に近付ければ、
x^2 は充分 9 に近付く」

という言い方をしていない、ということ

「近付く」	$\longleftrightarrow$	「近い」
動的 **(dynamic)**		静的 **(static)**

例題５：許容誤差の設計（数学版）

関数 $f(x) = x^2$ において、

（x を 3 に近付けると
$f(x)$ は $f(3) = 9$ に近付くようだが、
その誤差について、）

正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$|f(x) - f(3)| < \varepsilon$$

となるためには、

x がどの程度 3 に近ければ良いか？

（$|x - 3| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(3)| < \varepsilon$ となるには、
δ の値をどれくらいにすれば良いか？）

どんな（小さな）正の実数 ε に対しても、
或る（都合の良い）正の実数 δ が存在して、
どんな実数 x に対しても、

$$0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon$$

この流儀で $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ を定式化（定義）すると
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

どんな（小さな）正の実数 ε に対しても、
或る（都合の良い）正の実数 δ が存在して、
どんな実数 x に対しても、

$$0 < |x - 3| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 < |x - 3| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon$$

この流儀で $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ を定式化（定義）すると
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

どんな（小さな）正の実数 ε に対しても、
或る（都合の良い）正の実数 δ が存在して、
どんな実数 x に対しても、

$$0 < |x - 3| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 < |x - 3| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon$$

この流儀で $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ を定式化（定義）すると
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

ε-δ 流の関数の極限の定義

関数 f に対し、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow b \text{ である}$$

ということを、次で**定義**する：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ε-δ 流の関数の極限の定義

このとき、

$$f(x) \longrightarrow b \ (x \longrightarrow a)$$

となる b が一意的である（ことが証明できる）ので、

この（関数 f と実数 a とで定まる値）b を

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

と書き表す

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

このとき、

$$f(x) \longrightarrow b \ (x \longrightarrow a)$$

となる b が一意的である（ことが証明できる）ので、

この（関数 f と実数 a とで定まる値）b を

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

と書き表す

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

ε-δ 流の関数の連続の定義

関数 f が $x = a$ で連続であるとは、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow f(a) \text{ である}$$
$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$$

ということであったから、次のようになる：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

例題 6：関数の連続性

関数 $f(x) = x^2$ について、

f が $x = 3$ で連続であることを（ε-δ 流で）示せ。

すなわち、

任意の正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

或る正の実数 $\delta > 0$ が存在して、

任意の実数 x に対し、

$$|x - 3| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 3^2| < \varepsilon$$

となること（$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$）を示せ。

例題 7：関数の連続性

(1) 関数 $f(x) = 5x$ について、
任意の実数 a に対し、
f が $x = a$ で連続であることを示せ。

(2) 関数 $f(x) = x^3$ について、
任意の実数 a に対し、
f が $x = a$ で連続であることを示せ。

では引続き次回からは、

以上のような「不等式の取扱い」を用いて、

「収束」「発散」「極限」などについて、

詳しく調べていこう