

2021 年度春期

数学BI（微分積分）

（情報理工学科クラス）

（担当：角皆）

理工学の大学初年級で学ぶ数学

数学の分野 (手法)		解析学 (無限小解析)	代数学
理工学の 大学初年級では		微分積分	線型代数
本学 理工学部 1年次 では	春	数学 BI (微分積分) 数学演習 I	数学 AI (線型代数)
	秋	微分方程式の基礎 数学 BII (多変数微積) 数学 AII (線型空間論) 数学演習 II	
標語的には		不等式の数学	等式の数学

本講義の概要

- **不等式**による評価
- 収束・極限の基礎付け (ε - δ 論法)
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から **Taylor** の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式」は
高校まででは殆ど扱わない

不等式なんて高校でやったよ !!

高校で扱った不等式

例：2 次不等式

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

を解け。

解答：

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$(x - 2)(x - 5) < 0$$

従って、

$$2 < x < 5 \quad \square$$

例：2 次方程式

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

を解け。

解答：

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

従って、

$$x = 2, 5 \quad \square$$

「不等式」と言っても、
動作は等式の扱いと同様であった

では、ここで言う

「不等式の数学」

とはどういうものか？

不等式の数学とは？

収束・発散・極限などなど、

それも

- はさみ打ちの原理
- 区分求積法
- 誤差の評価 (**estimate**)

など

不等式の数学とは？

と言っても難しいことではない

使うことは次のような基本性質

- 順序としての性質
(反射律・推移律・反対称律)
- 演算との関係
- 絶対値の性質 (三角不等式)

大小関係・絶対値の基本性質

- 順序としての性質：

- ★ 反射律： $x \leq x$

- ★ 推移律： $x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$

- ★ 反対称律： $x \leq y, y \leq x \implies x = y$

- 演算との関係：

- ★ $x \leq y \implies x + a \leq y + a$

- ★ $a > 0, x \leq y \implies ax \leq ay$

大小関係・絶対値の基本性質

- 絶対値の性質：

- ★ $|x| \geq 0$ で、 $|x| = 0 \iff x = 0$

- ★ $|1| = 1, |-1| = 1$

- ★ $|xy| = |x||y|$

- ★ **三角不等式**： $|x + y| \leq |x| + |y|$
(triangle inequality)

絶対値について

実数 x に対し、

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

: x の絶対値 (**absolute value**)

絶対値と言えは、正負の場合分け？

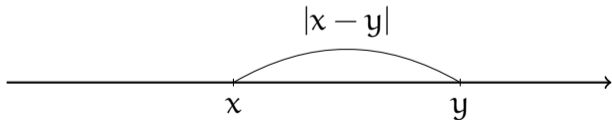
絶対値の本質は ...

絶対値について

絶対値の本質は、

隔たり（距離）を定める幾何的な概念

- $|x|$ は x の 0 からの隔たり
- $|x - y|$ は x と y との隔たり



絶対値について

三角不等式

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

は、距離が満たすべき重要な特徴（性質）

複素数の絶対値やベクトルの大きさも

同様な性質を持つ

例題 1：不等式による誤差評価

分銅 X はほぼ 3 g で誤差 0.01 g 未満、

分銅 Y はほぼ 5 g で誤差 0.02 g 未満、

であるとする。

両方合わせるとほぼ何 g で誤差はどれくらいか？

例題 1：不等式による誤差評価

分銅 **X** が x g、分銅 **Y** が y g であるとする。

$$|x - 3| < 0.01, \quad |y - 5| < 0.02$$

合わせるとほぼ $3 + 5 = 8$ g であるのは良からう。

誤差は、 $|(x + y) - (3 + 5)|$ g である。

$$|(x + y) - (3 + 5)| < \boxed{?}$$

誤差の

上からの評価 (**estimate**) ・ 上界 (**upper bound**)
を与えること

例題 1：不等式による誤差評価

$$|x - 3| < 0.01, \quad |y - 5| < 0.02$$

$$\begin{aligned} |(x + y) - (3 + 5)| &= |(x - 3) + (y - 5)| \\ &\leq |x - 3| + |y - 5| \\ &< 0.01 + 0.02 \\ &= 0.03 \end{aligned}$$

従って、誤差は 0.03 g 未満。

例題 1：不等式による誤差評価

同じことだが、次のように言っても良い：

分銅 **X** が x g、分銅 **Y** が y g であるとする。

誤差がそれぞれ h g, k g とすると、

$$x = 3 + h, \quad |h| < 0.01$$

$$y = 5 + k, \quad |k| < 0.02$$

例題 1：不等式による誤差評価

合計の誤差は、

$$\begin{aligned} & |(x + y) - (3 + 5)| \\ & = |((3 + h) + (5 + k)) - (3 + 5)| \\ & = |h + k| \quad \mathbf{g} \text{ である。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |h + k| & \leq |h| + |k| \\ & < 0.01 + 0.02 \\ & = 0.03 \end{aligned}$$

従って、誤差は 0.03 g 未満。

例題 2：不等式による誤差評価

一辺の長さが大体 3 cm の正方形の紙がある。

従って、面積は大体

$$3^2 = 9 \text{ cm}^2$$

である。

一辺の長さの誤差が 0.1 cm 未満であるとする。

面積の誤差はどれくらいか？

例題 2：不等式による誤差評価

説明の簡単のため、問題を単純にして、

縦横ともに、真の一辺の長さが x **cm**、

誤差が h **cm** であるとする、

$$x = 3 + h, \quad |h| < 0.1$$

面積の誤差は、

$$|x^2 - 3^2| \text{ cm}^2$$

例題 2：不等式による誤差評価

$$\begin{aligned} |x^2 - 3^2| &= |(3 + h)^2 - 3^2| \\ &= |6h + h^2| \\ &\leq |6h| + |h^2| \\ &= 6|h| + |h|^2 \\ &< 0.6 + 0.01 \\ &= 0.61 \end{aligned}$$

従って、誤差は 0.7 cm^2 未満 (1 cm^2 未満)。

例題 3：許容誤差の設計

一辺の長さが大体 3 cm の正方形の紙を作る。

面積は大体

$$3^2 = 9 \text{ cm}^2$$

であるが、さて、

面積の誤差が 0.1 cm² 未満

であることを保証するためには、

一辺の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか。

例題 3：許容誤差の設計

先と同様に、説明の簡単のため問題を単純にして、

縦横ともに、真の一辺の長さを x **cm** としよう。

この時、面積の誤差は $|x^2 - 3^2|$ **cm²** と表せる。

一辺の長さの誤差を h **cm** とすると、

$$x = 3 + h$$

誤差は δ **cm** 未満（つまり $|h| < \delta$ ）としよう。

例題 3 : 許容誤差の設計

設定 :

$$x = 3 + h, \quad |h| < \delta$$

目標 :

$$x = 3 + h, \quad |h| < \delta \implies |x^2 - 3^2| < 0.1$$

となる δ を見付けること

例題 3 : 許容誤差の設計

目標 : $x = 3 + h, |h| < \delta \implies |x^2 - 3^2| < 0.1$
となる δ を見付けること

- δ は 1 つ見付ければ良い
- 余り小さ過ぎない方が良い
- 余りぎりぎりでなくても良い
→ 桁くらい判れば良いだろう
- 論理的には厳密であること (\equiv ではなくて)
- 誤差の限界 (今は 0.1) が小さくなくても
通用する方法が良い

例題 3 : 許容誤差の設計

$$x = 3 + h, \quad |h| < \delta$$

$$\begin{aligned} |x^2 - 3^2| &= |(3 + h)^2 - 3^2| \\ &= |6h + h^2| \\ &\leq 6|h| + |h|^2 \\ &< 6\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

従って、

$$6\delta + \delta^2 \leq 0.1$$

となれば良い

2次不等式

$$6\delta + \delta^2 \leq 0.1$$

を解くのは大変だ

→ 2次の項 δ^2 を何とか処理したい

ここで、

- 誤差の限界 δ の厳密な範囲は必要ない
- δ は 1 つ見付ければ良い
- δ が小さい所で探せば良い

→ 例えば $\delta \leq 1$ という条件付きで考えてみよう

そこで、

$$\delta \leq 1$$

とする。すると、

$$\begin{aligned} 6\delta + \delta^2 &\leq 6\delta + \delta \\ &= 7\delta \end{aligned}$$

であるから、

$$7\delta \leq 0.1$$

となればよい。これより、

$$\delta \leq \frac{0.1}{7} \quad (= 0.0142857 \dots)$$

となるので、 $\delta \leq 0.01$ ならばよい。

これと、さっき仮定した

$$\delta \leq 1$$

とを共に満たせば良いので、

$$\delta = \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

に取れる。

従って、一辺の長さの誤差は

0.01 cm 未満

であれば良い。

実はこの辺りの議論は多分に技術的な話なのだが、

- ごく簡単な場合を除いて、多くの場合に必要
- 不等式での評価に於ける基本的な技術

なので、馴れておく必要がある

(技術的な細かい話)

さっき $\delta \leq 1$ とした後に、

$$6\delta + \delta^2 \leq 6\delta + 1$$

とすることも出来た
(ここだけ見るなら論理的には正しい)

しかし、これだと

$$6\delta + 1 \leq 0.1$$

としなければならなくなってしまい困る

→ 目標を見定めて議論を進める必要性

(技術的な細かい話)

もう少し厳しく、

$$\delta \leq \frac{1}{10} = 0.1$$

としておけば、

$$6\delta + \delta^2 \leq 6\delta + \frac{1}{100}$$

なので、

$$6\delta + \frac{1}{100} \leq 0.1$$

であれば良い

このような δ なら取ることが出来る

(技術的な細かい話)

しかし、この論法のためには、

0.1 だったらどれくらいにすれば良いか、
かなり注意深く取っておかないと破綻する
(本末転倒)

さっきのように、 $\delta \leq 1$ の下で、

$$\delta^2 \leq \delta$$

で評価しておけば、

誤差の限界が小さくなっても、

後で δ を小さくとれば対応できる

(技術的な細かい話)

勿論、より精密な限界が知りたければ／必要ならば、

- 2次不等式 $6\delta + \delta^2 \leq 1$ を解くなり、
- もっと精密な評価をするなり、

すればよい／せねばならない

今までは、
誤差の限界が 0.1 cm^2 に設定されていて、
その値未満に収めようとしてきたが、

この方法なら、原理的には、
どんなに厳しい（小さい）限界に対しても、
同様の議論が可能

→ 誤差の限界が 0.001 cm^2 だったら？

→ より一般に、誤差の限界を $\varepsilon \text{ cm}^2$ とすると？

例題 4：許容誤差の設計

一辺の長さが大体 3 cm の正方形の紙がある。

従って、面積は大体

$$3^2 = 9 \text{ cm}^2$$

である。さて、正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

面積の誤差が $\varepsilon \text{ cm}^2$ 未満

であることを保証するためには、

一辺の誤差をどの程度に収めれば良いか。

任意の（どんなに小さい）

正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対しても、

$$|h| < \delta \implies |(3+h)^2 - 3^2| < \varepsilon$$

となる正の実数値 $\delta > 0$ を見付けることが
可能であった

（ ε が小さければ δ も小さくしなければ
いけないけれども）

これは何をやっているかと言うと、

「 h が充分 0 に近ければ、
 $(3+h)^2$ は充分 9 に近い」

ということを行っている

「 x が充分 3 に近ければ、
 x^2 は充分 9 に近い」

と言っても良い

これが

$$\lim_{h \rightarrow 0} (3 + h)^2 = 9$$

すなわち

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$$

の実質的な意味内容なのであった !!

「 x が充分 3 に近ければ、
 x^2 は充分 9 に近い」

ここで重要なのは、

「 x を充分 3 に近付ければ、
 x^2 は充分 9 に近付く」

という言い方をしていない、ということ

「近付く」 \longleftrightarrow 「近い」
動的 (dynamic) 静的 (static)

例題 5 : 許容誤差の設計 (数学版)

関数 $f(x) = x^2$ において、

(x を 3 に近付けると

$f(x)$ は $f(3) = 9$ に近づくようだが、
その誤差について、)

正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$|f(x) - f(3)| < \varepsilon$$

となるためには、

x がどの程度 3 に近ければ良いか？

($|x - 3| < \delta \implies |f(x) - f(3)| < \varepsilon$ となるには、
 δ の値をどれくらいにすれば良いか？)

どんな（小さな）正の実数 ε に対しても、
或る（都合の良い）正の実数 δ が存在して、
どんな実数 x に対しても、

$$0 < |x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$0 < |x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \varepsilon$$

この流儀で $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ を定式化（定義）すると
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

ε - δ 流の関数の極限の定義

関数 f に対し、

$x \longrightarrow a$ のとき $f(x) \longrightarrow b$ である

ということを、次で**定義**する：

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$$

ε - δ 流の関数の極限の定義

このとき、

$$f(x) \longrightarrow b \quad (x \longrightarrow a)$$

となる b が一意的である（ことが証明できる）ので、

この（関数 f と実数 a とで定まる値） b を

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

と書き表す

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

ε - δ 流の関数の連続の定義

関数 f が $x = a$ で連続であるとは、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow f(a) \text{ である} \\ \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \right)$$

ということであったから、次のようになる：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

例題 6 : 関数の連続性

関数 $f(x) = x^2$ について、

f が $x = 3$ で連続であることを (ε - δ 流で) 示せ。

すなわち、

任意の正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

或る正の実数 $\delta > 0$ が存在して、

任意の実数 x に対し、

$$|x - 3| < \delta \implies |x^2 - 3^2| < \varepsilon$$

となること ($\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$) を示せ。

例題 7 : 関数の連続性

- (1) 関数 $f(x) = 5x$ について、
任意の実数 a に対し、
 f が $x = a$ で連続であることを示せ。
- (2) 関数 $f(x) = x^3$ について、
任意の実数 a に対し、
 f が $x = a$ で連続であることを示せ。

では引続き次回からは、

以上のような「不等式の取扱い」を用いて、

「収束」「発散」「極限」などについて、

詳しく調べていこう