数理物理および演習 III　　　　No.1　　　　　　　　　19　April.　2000

◎一次元調和振動子の解に含まれる Hermite **の多項式** $H_n(x)$**の数学的性質を先回りして学ぶ**

問 1.　Hermite **多項式の次の三つの性質が等価であることを証明する。**

Hermite **の微分方程式**
$$\left(\frac{d^2}{dy^2}-2y\frac{d}{dy}+2n\right)H_n(y)=0 \quad (n=0,1,2...) \text{ —— } (1)$$

ロドリグの公式
$$H_n(x)=(-1)^n\exp\left(x^2\right)\frac{d^n}{dx^n}\exp\left(-x^2\right) \text{ —— } (2)$$

母関数のテイラー展開
$$\exp\left(-t^2+2tx\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n \text{ —— } (3)$$

(3)**式⇔**(2)**式の証明**

ヒント ——　$\exp\left(-t^2+2tx\right)=\exp\left(x^2-(t-x)^2\right)$**を** t **についてテイラー展開することにより、展開係数に現れる式が**(2)**式と一致することを示せ。**

(2)**式⇔**(1)**式の証明**

ヒント ——　(3)**の両辺を** t **で微分して** t **のべきを揃えることにより、**$H_n(x)$**が漸化式**
$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0 \text{ —— } (4)$$
を満たすことを示す。次いで、(3)**の両辺を** x **で微分して**
$$\frac{d}{dx}H_n(x)=2nH_{n-1}(x) \text{ —— } (5)$$
を示す。最後に、(4)**、**(5)**、**(5)**の微分を使って** $H_n(x)$**の満たす微分方程式**(1)**を導け。**

問 2.　(3)**式及び、**(3)**式で** $t\leftrightarrow s$ **と置き換えた式の辺々**(**右辺同士、左辺同士**)**を掛け合わせ、両辺に**e^{-x^2} **を乗じて、**$\int_{-\infty}^{+\infty}dx$ **で積分し、**$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\cdot e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)=\sqrt{p}\,2^n n!$ **を示せ**(**直交性**)**。さらに** $H'_n\equiv H_n\Big/\sqrt{\sqrt{p}\,2^n n!}$ **とおけば規格化もされていることを確かめよ。**

問 3.　n=0,1,2...**について具体的に** $H_n(x)$**を求め、問** 2 **の性質が成り立つことを確かめよ。**

問 4.　$f(c_0,c_1,c_2\cdots)=\sum_k c_k H'_n$,　$f(d_0,d_1,d_2\cdots)=\sum_k d_k H'_n$ **とおいたとき、**

$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\cdot e^{-x^2}f(c_0,c_1,c_2\cdots)f(d_0,d_1,d_2\cdots)$**を求めよ。**(**ヒント—これは内積である**)

担当 —— 後藤 email: gotoo-t