5. 演習 (1)

問 5–1. (再掲) $f(X) = X^3 + pX + q$ の 3 根を x_1, x_2, x_3 とする。

(1) x_1, x_2, x_3 の基本対称式と p, q との関係は?

(2) 判別式 $D(f) = \prod_{1 \le i < j \le 3} (x_i - x_j)^2 = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$ を p, q で表せ。

問 5–2. (一部再掲) 次の 3 次方程式を解け。(可能なら因数分解・Cardano の公式の双方で)

(1) $X^3 + 6X - 20 = 0$　　(2) $X^3 - 21X + 20 = 0$

問 5–3. (再掲) "二重根号をはずす公式" $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ を確かめよ。

問 5–4. (一部再掲) $x = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ について、

(1) 二重根号をはずせ。

(2) x の 有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を求めよ。拡大次数 $[\boldsymbol{Q}(x) : \boldsymbol{Q}] = ?$

(3) その方程式を Ferrari の方法で解いてみよ。

(4) $\boldsymbol{Q}(x) = \boldsymbol{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ となる $a, b \in \boldsymbol{Z}$ があれば求めよ。

問 5–5. (一部再掲) $x = \sqrt{10 + 2\sqrt{17}}$ について、

(1) 無理やり二重根号をはずそうとするとどうなるか。

(2) x の 有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を求めよ。拡大次数 $[\boldsymbol{Q}(x) : \boldsymbol{Q}] = ?$

(3) その方程式を Ferrari の方法で解いてみよ。

(4) $\boldsymbol{Q}(x) = \boldsymbol{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ となる $a, b \in \boldsymbol{Z}$ があれば求めよ。

問 5–6. (一部再掲) $f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$ の 4 根を x_i $(i = 1, \ldots, 4)$ とする。

(1) x_i の基本対称式と p, q, r との関係は?

(2) $x_1x_2 + x_3x_4, x_1x_3 + x_2x_4, x_1x_4 + x_2x_3$ を 3 根とする 3 次多項式を求めよ (係数を p, q, r で表せ)。

(3) $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4), (x_1 + x_3)(x_2 + x_4), (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$ を 3 根とする 3 次多項式を求めよ (係数を p, q, r で表せ)。

問 5–7. $n \ge 2$ に対し、3 項式 $f(X) = X^n + pX + q$ の判別式を求めよ。(ヒント: f, f' の終結式として、互除法を用いて計算せよ。)

問 5–8. 素数 l に対し、$X^l - 1, X^{l-1} + X^{l-2} + \cdots + X + 1$ の判別式を求めよ。

問 5–9. 可換環 R とその積閉集合 S (即ち $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$) (但し $0 \notin S, 1 \in S$ とする) に対し、$R \times S$ 上の関係 $\sim$ を次で定義する。

- $(a, s) \sim (b, t) \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \exists u \in S : u(at - bs) = 0$

(1) $\sim$ が $R \times S$ 上の同値関係。以下、(a, s) の同値類を a/s と書く。

(2) $S^{-1}R := (R \times S)/\!\sim$ に次で和・積を定めると可換環を成す。

$$a/s + b/t := (at + bs)/st, \qquad a/s \cdot b/t := ab/st$$

(3) 特に、R : 整域で $S = R \setminus \{0\}$ の時、$S^{-1}R$ は体を成す。

問 5–10. 可換環 R とその ideal について、

(1) $\mathfrak{p}$: 素 ideal $\Longleftrightarrow$ $R/\mathfrak{p}$: 整域

(2) $\mathfrak{m}$: 極大 ideal $\Longleftrightarrow$ $R/\mathfrak{m}$: 体

問 5–11. (拡大次数の連鎖律) L/K の中間体 M に対し、$[L : K] = [L : M][M : K]$ を示せ。(ヒント: $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$: M の K 上の基底、$(\eta_1, \ldots, \eta_n)$: L の M 上の基底とするとき、$(\xi_i\eta_j)_{i,j}$: L の K 上の基底。)

問 5–12. $[L : K] < \infty$ (有限次拡大) のとき、L/K : 代数的。

問 5–13. 体拡大 L/K が代数的であっても $[L : K] < \infty$ (有限次拡大) とは限らない。例を挙げよ。

問 5–14. L/K の中間体 M に対し、$L/M, M/K$: 共に代数的 $\Longleftrightarrow$ L/K : 代数的。

問 5–15. 次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$　　(3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$