

体の代数拡大

- L/K : 体の拡大に対し、
 $[L : K] := \dim_K L : L/K$ の**拡大次数**
- $L \supset M \supset K$: 体の拡大の塔に対し、
 $[L : K] = [L : M][M : K]$
(拡大次数の連鎖律)
- 特に、
 L/K : 有限次 $\iff L/M, M/K$: 共に有限次

体の代数拡大

- $x \in L$ が K 上**代数的 (algebraic)**
 $\iff \exists f \in K[X] \setminus \{0\} : f(x) = 0$
- L/K : **代数的 (algebraic)**
 $\iff \forall x \in L : K$ 上代数的
- L/K : 有限次 $\implies L/K$: 代数的

体の代数拡大

$x \in L$ に対し、

$$\begin{aligned}\varphi_x : K[X] &\longrightarrow L: \text{環準同型} \\ g &\longmapsto g(x)\end{aligned}$$

$\mathfrak{p} := \text{Ker}\varphi_x$ と置くと、

$$\begin{aligned}x : K \text{ 上代数的} &\iff \mathfrak{p} \neq \{0\} \\ &\iff \exists f \in K[X] \setminus \{0\} : \mathfrak{p} = (f)\end{aligned}$$

この時、

$$\begin{aligned}f(X) &=: \text{Irr}(x/K; X) \in K[X] \\ &: x \text{ の } K \text{ 上の最小多項式という}\end{aligned}$$

$x \in L : K$ 上代数的

$f(X) = \text{Irr}(x/K; X) \in K[X]$
: x の K 上の最小多項式

のとき、

$$K[X]/(f) \hookrightarrow K[x] = K(x) \subset L$$

$$[K(x) : K] = \deg f$$

- $x : K$ 上代数的 $\iff K(x)/K$: 代数的
- $L \supset M \supset K$: 体の拡大の塔に対し、
 - ★ L/K :代数的 $\iff L/M, M/K$:共に代数的
 - ★ M/K :代数的のとき、
 $x \in L : M$ 上代数的 $\iff K$ 上代数的
- $x, y : K$ 上代数的
 $\implies x \pm y, xy, x/y : K$ 上代数的
- $\{x \in L \mid x : K \text{ 上代数的}\}$: 体を成す
 : L 内での K の代数閉包

根体

L/K : 体の拡大

$f(X) \in K[X]$: K 上既約な多項式

$x \in L$: f の根に対し、

$K(x)$ はどの根を取っても互いに K 上同型

$$K(x) \simeq K[X]/(f)$$

: K 上の f の根体

最小分解体

f の根体 $K(x)$ に

f の全ての根が含まれるとは限らない

- L/K が f の K 上の分解体

$\iff L[X]$ 内で $f(X)$ が 1 次式の積に分解

$$f(X) = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$$

- $\text{Spl}(f/K) := K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
: f の K 上の最小分解体

ここまでは注意深く、 K の拡大体 L を考えて、
「 L 内に f の根があるとき」
と言ってきた。

では、単に体 K と $f \in K[X]$ とがあるとき、

f の根を含む体を
いつでも考えることができるのか？

→ f の最小分解体を考えれば良い
(有限回の根添加で構成できる)

しかし、 f を考えるごとに一々作るのでは不便。
 Q に対して C を考えておくように、
全ての $f \in K[X]$ が根を持つような
大きな体を予め考えて、
常にその中で考えている、
と思っておくと便利ではないか。

- そのような都合の良い体が存在するのか？
(例えば、 $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に対しても?)
- 取り方が色々あるのではないか？

代数閉体: 次の同値な条件を満たす体 K のこと

- K の代数拡大は K 自身のみ
- $K[X]$ の既約多項式は 1 次式のみ
- $\forall f \in K[X] \setminus K$ が $K[X]$ 内で
1 次式の積に分解
- $\forall f \in K[X] \setminus K$ が $K[X]$ 内で
1 次因子を持つ
- $\forall f \in K[X] \setminus K$ が $K[X]$ 内に
重複を数えて $(\deg f)$ 個の根を持つ
- $\forall f \in K[X] \setminus K$ が $K[X]$ 内で
少なくとも 1 つ根を持つ

代数閉体

K : 体 $\subset \Omega$: 代数閉体のとき、

- Ω 内での K の代数閉包は代数閉体
- $\forall K(x)/K$: 代数的単拡大に対し、
 $\exists \iota : K(x) \hookrightarrow \Omega$: K 上の埋込
- $\forall L/K$: 代数拡大に対し、
 $\exists \iota : L \hookrightarrow \Omega$: K 上の埋込

実は、ここには微妙な所があって...

基本的には、
代数的単拡大に埋込を延長する操作を
繰返せばよいのだが、

L/K : 無限生成 (無限次) 代数拡大の時には
何度繰返しても L 全体にはならない。

$([L : K] = \infty, x : K \text{ 上代数的})$
 $\implies [L : K(x)] = \infty$

この操作をやり遂げて、
 K 上の埋込 $L \hookrightarrow \Omega$ を
作り終えることが出来るのか？

L/K : 有限生成 (有限次) 代数拡大なら大丈夫
一般の (無限次) の場合には**選択公理**が必要

選択公理と同値な命題:

- **Zorn の補題**
- **整列可能定理 (Zermelo)**
- 線型空間の基底の存在
- 環の極大 ideal の存在
- **Tikhonov の積定理** など

選択公理 (又はそれと同値な命題) を認めれば、

K : 体 $\subset \Omega$: 代数閉体のとき、

$\forall L/K$: 代数拡大に対し、

$\exists \iota : L \hookrightarrow \Omega$: K 上の埋込

は大丈夫。特に、

L_1, L_2 : K 上代数的な代数閉体 (代数閉包) は
互いに K -同型

→ 代数閉包は存在すれば

K -同型を除いて一意の
(通常 \overline{K} と書く)

代数閉包の存在 (構成)

K 上の全ての多項式 $f \in K[X]$ の
全ての根を添加せよ

(添加し終わるには選択公理が必要)

選択公理の下に、

定理: 任意の体に対し、代数閉包が存在する

以下、通常は、

体 K に対し、

(K -同型を除いて一意に存在する) 代数閉包を

予め 1 つ取って固定して \bar{K} と書き、

全ての代数拡大 L/K は \bar{K} の部分体と見る。